§ 64. Тождественность частиц. Принцип тождественности частиц. Симметричные и антисимметричные состояния

Мы перейдем теперь к построению волновой функции системы частиц одного рода, например системы электронов, протонов, фотонов и т. п.

В таких системах проявляются новые важные особенности, не имеющие аналога в классической механике системы частиц. Эти особенности станут ясны из сравнения процесса соударения двух частиц — макроскопических и микроскопических.

В классической механике свойства каждой частицы характеризуются одной величиной — ее массой. Если массы обеих частиц равны, то частицы можно считать совершенно одинаковыми. Состояние каждой из частиц в момент $t = 0$ задается начальными условиями.

Двигаясь по определенным траекториям, частицы упруго сталкиваются в некоторой точке пространства и расходятся по соответствующим траекториям.

Если заданы начальные условия, то траектории каждой частицы полностью определены и за движением каждой частицы можно проследить. Поэтому в классической механике частицы, хотя бы и одинаковые, сохраняют свою индивидуальность. Всегда можно определить, какая именно из сталкивающихся частиц попала в данную точку пространства.

Совершенно иначе тот же процесс столкновения происходит с двумя микрочастицами. Пусть в момент соударения обе частицы находились в определенных точках пространства. При этом, согласно соотношению неопределенности, их импульсы не имели определенного значения. После соударения мы можем зафиксировать «траектории» частиц, например два следа в камере Вильсона. Ясно, однако, что если обе сталкивающиеся частицы были одной природы, — например сталкивались два электрона или два протона, — то какая именно из этих частиц связана с данным следом, установить принципиально невозможно.

В качестве второго примера рассмотрим систему, состоящую из двух атомов водорода.

Если атомы находятся на достаточно больших расстояниях друг от друга, так, что электронные облака не перекрываются, то каждый электрон практически локализован у своего ядра. По мере сближения атомов возникает перекрытие электронных облаков. Это означает, что в области перекрытия имеется некоторая вероятность нахождения обоих электронов.

Пусть в результате измерения в этой области обнаружен электрон. Ясно, что не существует никаких способов, которые позволили бы установить, какой это электрон, принадлежащий ранее ядру № 1 или № 2.

Приведенные примеры показывают, что одинаковость квантовых частиц имеет гораздо более глубокую природу, чем «одинаковость» классических частиц. Квантовые частицы не просто одинаковы, но совершенно тождественны.

Если мы захотели бы изменить начальное состояние системы, заменив один электрон на другой, в системе не произошло бы никаких физических изменений, никаким физическим опытом невозможно обнаружить эту замену.

Необходимо подчеркнуть также, что в приведенных примерах мы несколько схематизировали ситуацию. Если, например, обе сталкивающиеся частицы имеют определенные значения импульсов, они не имеют никаких определенных значений координаты. Поэтому нельзя даже указать область столкновения.

Таким образом, мы приходим к принципу тождественности частиц, который можно сформулировать следующим образом: в системе тождественных частиц осуществляются лишь такие состояния, которые не меняются при перестановке местами любых двух тождественных частиц.

Тождественность микрочастиц приводит к весьма важным и глубоким следствиям. Напомним, что мы столкнулись уже с этим свойством микрочастиц в статистической физике. Сейчас мы более последовательно разберем, как тождественность частиц влияет на свойства их коллектива.

Рассмотрим систему, состоящую из N тождественных частиц. Волновая функция такой системы ψ будет иметь вид

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_N, t).$$

Здесь под ξ_i понимается вся совокупность координат и спиновых переменных, характеризующих i-ю частицу.

Если переставить между собой две частицы, т. е. заменить координаты и спин i-й частицы соответствующими величинами для k-й частицы и наоборот, то в силу принципа тождественности состояние системы не может измениться. Следовательно, волновая функция системы может измениться лишь на несущественный фазовый множитель.

После перестановки двух частиц волновую функцию можно выразить через исходную соотношением

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_N, t) = \\ = e^{i\alpha}\psi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_N, t), \quad (64,1)$$

где α — некоторая вещественная величина. Если еще раз произвести операцию перестановки i-й и k-й частиц, то система вернется в исходное состояние.

С другой стороны, производя повторно операцию (64,1), мы можем записать:

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_N, t) = \\ = e^{i\alpha}\psi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_N, t) = \\ = e^{2i\alpha}\psi(\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_N, t).$$

Отсюда следует, что $e^{2i\alpha} = 1$ и

$$e^{i\alpha} = \pm 1.$$

Таким образом, при перестановке двух тождественных частиц волновая функция системы может или не измениться совсем, или изменить знак на обратный. Волновые функции первого типа называются симметричными, волновые функции второго типа — антисимметричными. Введем важный для дальнейшего оператор перестановок или обменный оператор $\hat{P}_{ik}$. По определению при воздействии оператора $\hat{P}_{ik}$ на волновую функцию системы частиц $\psi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_N, t)$ он переводит ее в новую функцию

$$\hat{P}_{ik}\psi(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_N, t) = \\ = \psi(\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_N, t). \quad (64,2)$$

Этой замене соответствует переход i-й частицы в состояние, ранее занятое k-й частицей, а k-й частицы — в состояние i-й частицы.

Сравнивая (64,2) с (64,1), мы видим, что собственные значения оператора $\hat{P}_{ik}$ равны $e^{i\alpha} = \pm 1$. При этом симметричные и антисимметричные функции являются собственными функциями оператора $\hat{P}_{ik}$, отвечающими собственным значениям соответственно $+1$ и -1.

С помощью оператора перестановки покажем, что свойства симметрии сохраняются во времени. Это означает, что если система в первоначальный момент времени находилась в симметричном или антисимметричном состоянии, то никакое последующее воздействие не изменяет характера ее симметрии. Иными словами, система все время будет оставаться либо в симметричном, либо в антисимметричном состоянии. Для доказательства этого утверждения необходимо показать, что оператор $\hat{P}_{ik}$ коммутирует с оператором Гамильтона. Перестановка местами двух тождественных частиц отвечает лишь перестановке членов в сумме, образующей гамильтониан системы. Это легко видеть на примере системы, состоящей из двух тождественных частиц.

В этом случае гамильтониан может быть записан в форме

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta_2 + U(\xi_1, t) + U(\xi_2, t) + U_{12}(\xi_1, \xi_2, t). \quad (64,3)$$

Здесь $U_{12}(\xi_1, \xi_2, t)$ — энергия взаимодействия частиц, а U отвечает взаимодействию с внешним полем и имеет, очевидно, для двух тождественных частиц одинаковый вид. При перестановке частиц для нового гамильтониана имеем:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_2 - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta_1 + U(\xi_2, t) + U(\xi_1, t) + U_{12}(\xi_2, \xi_1, t). \quad (64,4)$$

Совершенно ясно, что это тот же гамильтониан, что и до перестановки. Полученный результат без труда переносится на случай системы из N частиц. Мы видим, что перестановка частиц не изменяет гамильтониан. Поэтому получаем

$$\hat{H}\hat{P}_{ik} - \hat{P}_{ik}\hat{H} = 0. \quad (64,5)$$

Следовательно, свойства симметрии системы являются интегралом движения и сохраняются во времени.

Таким образом, естественно думать, что симметрия определяется свойствами самих элементарных частиц, которые составляют систему. Удалось показать, что частицы, обладающие целым спином, описываются симметричными функциями, а частицы с полуцелым спином — антисимметричными функциями. Первые частицы называют частицами Бозе — Эйнштейна или бозонами, вторые — частицами Ферми — Дирака (или фермионами). К первой группе частиц относятся: кванты света (см. гл. XII), π-мезоны и др. Ко второй: нейтроны, протоны, позитроны, электроны, нейтрино, μ-мезоны (у всех спин $^1/_2$) и др.

Для выяснения вопроса о свойствах симметрии системы, состоящей из тождественных сложных частиц, следует определить полный спин сложной частицы. Так же как и в случае элементарных частиц, волновая функция при целом спине сложной частицы симметрична при перестановке местами сложных частиц и антисимметрична при полуцелом спине сложной частицы.

В виде примера рассмотрим систему, состоящую из α-частиц. Для определения свойств симметрии волновой функции системы необходимо подсчитать полный спин α-частицы. α-частица состоит из двух нейтронов и двух протонов. Так как спины входящих в нее частиц равны $\hbar/2$, а число частиц четно, то полный спин α-частицы равен лишь целому кратному $\hbar$. Таким образом, волновая функция системы α-частиц является симметричной волновой функцией.