

же состоянии с волновой функцией $\psi(\xi)$, которая нормирована следующим образом:

$$\int \psi^*(\xi) \psi(\xi) dV = N.$$

Определим среднюю энергию системы в этом состоянии. Гамильтониан такой системы частиц запишем в виде

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \hat{H}_i(\xi_i) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \hat{W}_{ij}(\xi_i, \xi_j), \quad (65,7)$$

где \hat{H}_i — оператор энергии i -го бозона и \hat{W}_{ij} — оператор энергии взаимодействия i -го и j -го бозонов. Волновая функция системы бозонов, нормированная на единицу, имеет в этот момент времени вид

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \frac{1}{\sqrt{N^N}} \psi(\xi_1) \psi(\xi_2) \dots \psi(\xi_N).$$

Средняя энергия системы в этом состоянии равна

$$\bar{H} = \int \psi^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \hat{H} \psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) dV_1 dV_2 \dots dV_N.$$

Учитывая тождественность бозонов и считая $N \gg 1$, получаем

$$\begin{aligned} \bar{H} = & \int \psi^*(\xi_i) \hat{H}_i \psi(\xi_i) dV_i + \\ & + \frac{1}{2} \int \psi^*(\xi_i) \psi^*(\xi_j) \hat{W}_{ij}(\xi_i, \xi_j) \psi(\xi_i) \psi(\xi_j) dV_i dV_j. \end{aligned} \quad (65,8)$$

Если частицы не взаимодействуют, то $\bar{W} \equiv 0$, и среднее значение энергии имеет вид

$$\bar{H} = \int \psi^*(\xi_i) \hat{H}_i \psi(\xi_i) dV_i. \quad (65,9)$$

Выражения (65,8) и (65,9) потребуются нам для дальнейшего.

§ 66. Волновая функция системы из двух тождественных частиц со спином $1/2$

Имея в виду дальнейшие приложения, рассмотрим более подробно волновую функцию системы, состоящей из двух частиц со спином $1/2$, например двух электронов или протонов.

Полная волновая функция $\psi_n(\mathbf{r}_1, s_{1z}, \mathbf{r}_2, s_{2z})$ зависит от пространственных и спиновых координат обеих частиц и антисимметрична в этих переменных. Предполагая, что внешнее магнитное поле отсутствует, а взаимодействие между частицами не зависит от их спинов, представим полную волновую функцию в виде произведения волновых функций, зависящих только от пространственных и от спиновых переменных.

$$\psi_n(\mathbf{r}_1, s_{1z}, \mathbf{r}_2, s_{2z}) = \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \varphi(s_{1z}, s_{2z}). \quad (66,1)$$

Полную спиновую функцию системы φ представим в виде произведения собственных функций оператора квадрата спина и его проекции на ось z каждой из частиц, т. е. функций $\varphi_{1/2}(1)$, $\varphi_{-1/2}(1)$, $\varphi_{1/2}(2)$, $\varphi_{-1/2}(2)$, где индекс означает проекцию спина на ось z , а число в скобках — номер частицы.

В самом общем виде функцию φ можно записать так:

$$\varphi(1, 2) = c_1 \varphi_{1/2}(1) \varphi_{1/2}(2) + c_2 \varphi_{-1/2}(1) \varphi_{-1/2}(2) + c_3 \varphi_{1/2}(1) \varphi_{-1/2}(2) + c_4 \varphi_{-1/2}(1) \varphi_{1/2}(2), \quad (66,2)$$

где c_1, c_2, c_3 и c_4 — произвольные амплитуды.

Определим спиновые волновые функции, описывающие состояние с заданным полным спином системы и его проекцией на ось z .

Так как спины складываются по общим правилам сложения моментов (см. § 52), то полный спин системы из двух частиц принимает два значения $S = 1$ и $S = 0$. Его проекция на ось z соответственно имеет значения 1, 0 и -1 при $S = 1$ и $S_z = 0$ при $S = 0$ (в единицах \hbar).

Функции φ , описывающие состояние с заданными S и S_z , удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \hat{S}^2 \varphi &= \hbar^2 S(S+1) \varphi, \\ \hat{S}_z \varphi &= \hbar S_z \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (66,3)$$

где $\hat{S} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2$ — оператор полного спина системы. Коэффициенты c_1, c_2, c_3 и c_4 в спиновой функции системы (66,2) должны быть подобраны так, чтобы оба уравнения (66,3) для φ были автоматически удовлетворены.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что спиновая функция системы, отвечающая всем указанным условиям, может быть написана в виде ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^1 &= \varphi_{1/2}(1) \varphi_{1/2}(2), \quad S = 1, \quad S_z = 1, \\ \varphi_0^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_{1/2}(1) \varphi_{-1/2}(2) + \varphi_{-1/2}(1) \varphi_{1/2}(2)], \quad S = 1, \quad S_z = 0, \\ \varphi_{-1}^1 &= \varphi_{-1/2}(1) \varphi_{-1/2}(2), \quad S = 1, \quad S_z = -1, \\ \varphi_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_{1/2}(1) \varphi_{-1/2}(2) - \varphi_{-1/2}(1) \varphi_{1/2}(2)], \quad S = 0, \quad S_z = 0, \end{aligned} \right\} \quad (66,4)$$

где верхний индекс указывает полный спин двух частиц, а нижний — его проекцию на ось z .

¹⁾ Выражения (66,4), (66,5) следуют из формулы (52,3) и таблицы коэффициентов C (стр. 209) при $j_1 = 1/2$.

Этот результат можно получить также, основываясь на соотношениях (61,18). Заметим, что спиновые функции (66,4) не изменяются при перестановке местами первой и второй частиц, т. е. при замене $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$. Следовательно, эти функции симметричны в спинах частиц. Спиновая функция (66,5) изменяет знак при такой перестановке и является антисимметричной в спинах.

Спиновые функции (66,4) образуют спиновый триплет. Совокупность трех компонент триплета эквивалентна трехкомпонентной спиновой функции частицы со спином единица. Спиновая функция (66,5), описывающая состояние со спином, равным нулю, образует спиновый синглет.

Определим собственные значения скалярного произведения $(\hat{s}_1 \hat{s}_2)$ в синглетном и триплетном состояниях. С этим произведением нам придется иметь дело в дальнейшем. Поскольку

$$\hat{S}^2 = (\hat{s}_1 + \hat{s}_2)^2 = \hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2 + 2(\hat{s}_1 \hat{s}_2),$$

то

$$(\hat{s}_1 \hat{s}_2) = \frac{1}{2} (\hat{S}^2 - \hat{s}_1^2 - \hat{s}_2^2). \quad (66,6)$$

Подставляя в правую часть собственные значения операторов \hat{S}^2 , \hat{s}_1^2 и \hat{s}_2^2 , имеем:

$$(\hat{s}_1 \hat{s}_2) \varphi^s = \frac{\hbar^2}{2} \left(S(S+1) - \frac{3}{2} \right) \varphi^s. \quad (66,7)$$

Для триплетного состояния $S = 1$ и

$$(\hat{s}_1 \hat{s}_2) \varphi^1 = \frac{1}{4} \hbar^2 \varphi^1. \quad (66,8)$$

Соответственно для синглетного состояния $S = 0$

$$(\hat{s}_1 \hat{s}_2) \varphi^0 = -\frac{3}{4} \hbar^2 \varphi^0. \quad (66,9)$$

Рассмотрим теперь функцию от пространственных переменных $\Phi(r_1, r_2)$. Так как полная волновая функция (66,1) антисимметрична, то координатная волновая функция будет антисимметричной в состоянии $S = 1$ и симметричной в состоянии $S = 0$. Если частицы не взаимодействуют и находятся в некоторых состояниях ψ_n и ψ_m , то координатная функция имеет вид

$$\Phi_a(r_1, r_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_n(r_1) \psi_m(r_2) - \psi_m(r_1) \psi_n(r_2)], \quad S = 1, \quad (66,10)$$

$$\Phi_s(r_1, r_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_n(r_1) \psi_m(r_2) + \psi_m(r_1) \psi_n(r_2)], \quad S = 0. \quad (66,11)$$

В общем случае удобно перейти, как это показано в § 14, к координатам $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, описывающим соответственно движение центра тяжести системы и относительное движение частиц,

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_0(\mathbf{R})\psi(\mathbf{r}). \quad (66,12)$$

Выясним, к каким следствиям приводит требование симметрии или антисимметрии волновой функции (66,12). Заметим прежде всего, что если потенциал взаимодействия частиц зависит только от расстояния между ними, $U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$, то в такой системе сохраняется орбитальный момент количества движения, связанный с относительным движением частиц (см. § 35). Произведем теперь перестановку координат частиц $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1$. При такой перестановке радиус-вектор центра тяжести \mathbf{R} не изменяется. Следовательно, не изменяется и волновая функция $\psi_0(\mathbf{R})$. Радиус-вектор относительного движения \mathbf{r} меняет знак $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$. Если орбитальный момент, связанный с относительным движением частиц, задан и определяется квантовым числом l , то закон преобразования функции $\psi(\mathbf{r})$ при замене \mathbf{r} на $-\mathbf{r}$, как мы выяснили в § 33, будет:

$$\psi(-\mathbf{r}) = (-1)^l \psi(\mathbf{r}). \quad (66,13)$$

Мы видим, что в этом случае координатная волновая функция (66,12) при перестановке частиц $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1$ преобразуется по закону

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rightarrow (-1)^l \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (66,14)$$

Из (66,14) сразу следует, что если частицы находятся в триплетном состоянии $S = 1$, то квантовое число l может принимать лишь нечетные значения. Наоборот, число l может принимать лишь четные значения, если частицы находятся в синглетном состоянии $S = 0$.

§ 67. Обменное взаимодействие и понятие о химическом и сильном ядерном взаимодействиях

Тождественность квантовых частиц приводит к фундаментальному изменению представления о взаимодействии между частицами.

Остановимся прежде всего на одном простом примере, позволяющем понять сущность этих изменений. Предположим, что две тождественные частицы с полуцелым спином не взаимодействуют друг с другом в классическом понимании этого слова. Это означает, что в гамильтониане системы нет членов, описывающих взаимодействие между частицами.