Таким образом, для сдвига уровней получаем

$$\Delta E = \frac{e^2\mathscr{H}^2}{12mc^2}\sum_i \overline{r_i^2}. \tag{75,4}$$

Так как магнитный момент атома можно вычислить с помощью формулы $\boldsymbol{M} = -\frac{\partial\,\Delta E}{\partial \mathscr{H}}$ (ср. (41,1) ч. IV), то мы получаем

$$\boldsymbol{M} = \chi\mathscr{H};\ \chi = -\frac{e^2}{6mc^2}\sum_i \overline{r_i^2}. \tag{75,5}$$

Таким образом, атомы обладают диамагнитной восприимчивостью. Поскольку последняя определяется в основном средним квадратичным расстоянием всех электронов от ядра, то $\sum\limits_i \overline{r_i^2}$ возрастает, хотя $\overline{r_i^2}$ с ростом Z уменьшается. Поэтому χ особенно велико у многоэлектронных атомов. Для многоэлектронных атомов хорошие результаты дает применение метода Томаса — Ферми. Поэтому диамагнитные восприимчивости часто рассчитывают по этому методу.

С другой стороны, измерения χ представляют один из лучших способов нахождения эффективных размеров атомов. Подчеркнем, что все атомы и ионы имеют диамагнитную восприимчивость. Однако у некоторых ионов парамагнитная восприимчивость, связанная со спиновым магнитным моментом, превышает диамагнитную.

§ 76. Теория дейтона

В теории ядра дейтон, состоящий из протона и нейтрона, играет ту же роль, какую в теории атома играет водород.

Ядерное взаимодействие между протоном и нейтроном может зависеть от расстояния между ними r и взаимной ориентации спинов обеих частиц $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$. Явный вид потенциальной энергии ядерного взаимодействия в настоящее время неизвестен. Поэтому приходится ограничиваться написанием самого общего выражения для оператора потенциальной энергии, зависящего от $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$. Оператор взаимодействия не должен изменяться при повороте системы координат. Кроме того, как показывает опыт, в ядерных силах имеет место закон сохранения четности (см. § 33). Это означает, что оператор взаимодействия не должен изменяться при отражении координат (оператор взаимодействия должен коммутировать с оператором четности). Таким образом, нам необходимо составить всевозможные скаляры из трех векторов $\boldsymbol{r}$; $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$. Величинами, не меняющимися при повороте системы координат, являются следующие скаляры: $(\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2)$, $(\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{r})$ и $(\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{r})$.

Произведения $(\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{r})$ и $(\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{r})$ не могут входить в потенциальную энергию порознь, так как вектор спина является аксиальным вектором, а произведение $(\boldsymbol{s}\boldsymbol{r})$ — псевдоскаляром, изменяющим свой знак при отражении координат. Произведение $(\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{r})(\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{r})$ не изменяет знака при отражении и, следовательно, можно входить в потенциальную энергию. Спиновые операторы в высших степенях не входят в оператор энергии взаимодействия U, так как высшие степени операторов спина с помощью формулы (60,17) сводятся к линейным комбинациям $\boldsymbol{s}$.

Таким образом, выражение для потенциальной энергии будет иметь вид

$$U = U_1(r) + U_2(r)(\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2) + U_3(r)(\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{r})(\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{r}), \tag{76,1}$$

где U_1, U_2, U_3 — некоторые функции, зависящие от расстояния между частицами. Помимо оператора (76,1), представляющего потенциальную энергию обычного типа, взаимодействие между протоном и нейтроном может иметь характер обменных сил. Согласно результатам § 67, последнюю можно записать с помощью оператора обмена $\hat{P}_{12}$ в виде

$$U_{\text{обм}} = \hat{P}_{12}\left[U_4(r) + U_5(r)(\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2) + U_6(r)(\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{r}_2)\right]. \tag{76,2}$$

Здесь U_4, U_5 и U_6 — функции расстояния между частицами, не зависящие от их спинов. Для общности считается, что вид этих функций отличен от вида функций U_1, U_2, U_3, входящих в потенциальную энергию обычного взаимодействия. Полная энергия взаимодействия равна сумме выражений (76,1) и (76,2). Совокупность данных о стабильных состояниях дейтона, изучение рассеяния нейтронов протонами и др. не позволяют пока определить вид этих функций. Более того, нет оснований считать какую-либо из этих функций малой по сравнению с другими. Таким образом, даже простейшая ядерная система оказывается неизмеримо более сложной, чем атомные системы.

Опытные данные позволяют уже сейчас произвести классификацию состояний дейтона. Гамильтониан системы из двух нуклонов — протона и нейтрона — с написанной выше энергией взаимодействия, как легко видеть, приводит к двум законам сохранения: закону сохранения полного момента и закону сохранения четности.

Состояния дейтона обозначаются такими же символами, как и состояния атомов. Состояния с орбитальным моментом $L = 0$, 1, 2, ... обозначаются соответственно S, P, D и т. д. Мультиплетность $(2S + 1)$-терма обозначается индексом, стоящим в левом верхнем углу (S — полный спин дейтона). Индекс в правом нижнем углу указывает полный момент J дейтона. Например, в состоянии ${}^3P_0$ полный спин равен единице, $L = 1$, и полный момент равен нулю.

Обсудим возможные состояния системы с учетом того, что спин нейтрона и протона равен $1/2$. Формальное применение правила сложения моментов приводит к следующим возможным состояниям системы:

$$^1S_0, \quad ^1P_1, \quad ^1D_2 \qquad \text{(синглеты)},$$

$$^3S_1, \quad ^3P_0, \quad ^3P_1, \quad ^3P_2, \quad ^3D_1, \quad ^3D_2, \quad ^3D_3 \qquad \text{(триплеты)}.$$

S- и D-состояния являются четными, P — нечетным состоянием. Состояний с $L > 2$ мы не выписываем. Какие именно из этих состояний реализуются в природе, можно установить только из опытных данных. Опыт показывает, что основным состоянием дейтона является четное состояние с $J = 1$[1]).

Далее, пользуясь правилами сложения моментов, установим возможные состояния системы с полным моментом $J = 1$.

Суммарный спин системы, состоящий из нейтрона и протона, может равняться нулю либо единице. Если спин равен нулю, то возможно только одно состояние $L = 1$, приводящее к полному моменту $J = 1$. При спине, равном единице, орбитальный момент может принимать три значения: $L = 0, 1, 2$. Следовательно, всего возможны четыре состояния: $^1P_1$, $^3S_1$, $^3P_1$, $^3D_1$; состояния $^1P_1$ и $^3P_1$ не могут реализоваться, поскольку они являются нечетными.

Далее, легко заметить, что невозможны суперпозиции таких состояний, как $^3S_1 + {^3P_1}$ или $^3S_1 + {^1P_1}$, так как S- и P-состояния имеют различные четности и волновая функция, отвечающая их суперпозиции, не является собственной функцией оператора четности.

Таким образом, дейтон может находиться либо в состоянии $^3S_1$, либо в состоянии $^3D_1$, либо в состоянии, являющемся суперпозицией этих двух состояний. Состояние S сферически-симметрично. Если бы дейтон находился в этом состоянии, то его квадрупольный момент был бы равен нулю. Опыт показывает, однако, что квадрупольный момент дейтона отличен от нуля, хотя и мал. Это означает, что нормальное состояние дейтона представляет суперпозицию сферически-симметричного $^3S_1$-состояния и асимметричного $^3D_1$-состояния.

Зная экспериментальное значение квадрупольного момента дейтона, можно оценить вклад, который вносит $^3D_1$-состояние в волновую функцию дейтона. Этот вклад оказывается малым. Таким образом, можно считать, что дейтон является сферически-симметричной системой с небольшой примесью асимметрии, вносимой D-состоянием.

---

[1]) См. Л. Д. Ландау и Я. А. Смородинский, Лекции по теории ядра, Гостехиздат, 1955; А. И. Ахиезер и И. Я. Померанчук, Некоторые вопросы теории ядра, Гостехиздат, 1950, §§ 2 и 5.

Для дальнейших оценок рассмотрим грубую модель дейтона, в которой будем считать, что потенциальная энергия взаимодействия между нейтроном и протоном зависит только от расстояния между ними. Иными словами, в формуле (76,1) оставим только первый член $U_1(r) \equiv U(r)$. Асимметрией дейтона мы будем при этом пренебрегать, считая, что он находится в основном состоянии. Уравнение для относительного движения нейтрона и протона в соответствии с формулой (14,11) можно написать в виде

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + U(r)\right]\psi_0 = \varepsilon\psi_0. \tag{76,3}$$

Приведенная масса системы в этом случае равна

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_n},$$

где m_p — масса протона, m_n — масса нейтрона.

Так как $m_p \approx m_n$, то получаем:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{2}{m_p}.$$

Относительно потенциальной энергии $U(r)$ мы ограничимся лишь общим допущением о ее быстром стремлении к 0 при $r \to r_0$, где r_0 — радиус действия ядерных сил. При $r < r_0$ конкретным видом $U(r)$ мы задаваться не можем, так как не знаем закона взаимодействия ядерных сил.

Если искать функцию ψ_0 в виде

$$\psi_0(r) = \frac{\chi(r)}{r}, \tag{76,4}$$

то, используя формулу (35,16) с $l = 0$, мы получим уравнение для функции $\chi(r)$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{m_p}\frac{d^2}{dr^2} + U(r)\right]\chi(r) = \varepsilon\chi(r). \tag{76,5}$$

При $r > r_0$ уравнение (76,5) запишется в форме

$$-\frac{\hbar^2}{m_p}\frac{d^2\chi}{dr^2} = \varepsilon\chi. \tag{76,6}$$

Будем искать решение, убывающее на бесконечности в виде

$$\chi = Ce^{-\alpha r}. \tag{76,7}$$

Подставляя (76,7) в (76,6), получим соотношение для α

$$-\frac{\hbar^2}{m_p}\alpha^2 = \varepsilon = -|\varepsilon|,$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{m_p|\varepsilon|}{\hbar^2}}. \tag{76,8}$$

При этом для волновой функции имеем

$$\psi_0 = C\frac{e^{-\alpha r}}{r}. \tag{76,9}$$

За характеристику размеров дейтона можно выбрать величину $r_1 = \frac{1}{\alpha}$, т. е. такое расстояние, на котором волновая функция χ уменьшается в e раз. Расстояние r_1 легко определить из соотношения (76,8), так как энергия связи дейтона хорошо известна из опытных данных. Она равна $|\varepsilon| = 2{,}19$ *Мэв*. Подставляя значение $\hbar$ и m_p в формулу (76,8), получим $r_1 = 4{,}3\cdot 10^{-13}$ *см*. Следовательно, волновая функция ψ_0 дейтона отлична от нуля в области значительно большей, чем область действия ядерных сил ($r_0 \approx 2\cdot 10^{-13}$ *см*). Таким образом, мы видим, что нейтрон и протон с большой вероятностью могут быть обнаружены на таких расстояниях друг от друга, которые существенно превосходят размеры области действия ядерных сил.

В области $r < r_0$ нельзя определить зависимость волновой функции ψ_0 от расстояния, так как потенциальная энергия в этой области неизвестна.

Однако из общей теории движения в сферически-симметричном поле следует, что при $r \to 0$ функция χ пропорциональна r^{l+1} (см. § 35) и, следовательно, в S-состоянии пропорциональна r. Таким образом, на малых расстояниях функция χ стремится к нулю.

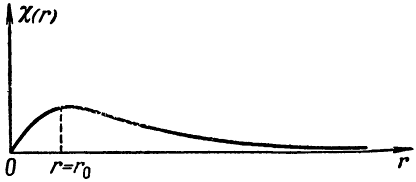

Рис. 21.

Постоянную C, входящую в ψ-функцию, можно найти из условия нормировки. В качестве волновой функции ψ_0 при $r < r_0$ возьмем ее значение в виде (76,9), которое будем считать справедливым во всем пространстве. При этом мы не вносим существенной ошибки, так как большая часть нормировочного интеграла относится к области $r > r_0$. Подставляя (76,9) в условие нормировки, находим:

$$C = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}. \tag{76.10}$$

Установим теперь общее соотношение между шириной ямы r_0 и ее глубиной. Для этого проинтегрируем уравнение (76,5) в пределах от нуля до $r = r_0$. В результате интегрирования получим:

$$\chi'_{r=r_0} - \chi'_{r=0} = \frac{m_p}{\hbar^2}\int_0^{r_0} U(r)\,\chi(r)\,dr + \frac{m_p|\varepsilon|}{\hbar^2}\int_0^{r_0}\chi\,dr. \tag{76,11}$$

Как видно из рис. 21, значение производной $|\chi'|$, взятой в точке $r = r_0$, значительно меньше производной $|\chi'_{r=0}|$. Кроме того, можно пренебречь энергией связи по сравнению с потенциальной энергией взаимодействия, т. е. считать $|\varepsilon| < |U(r)|$ при $r < r_0$. На малых расстояниях $\chi = Nr$, где N — некоторая константа. Тогда (76,11) преобразуется к виду

$$-N = \frac{m_p}{\hbar^2} N \int_0^{r_1} U(r)\, r\, dr \tag{76,12}$$

или

$$\int_0^{r_0} U(r)\, r\, dr = -\frac{\hbar^2}{m_p}. \tag{76,13}$$

Заменяя интеграл в (76,13) на $U_0 r_0^2$, где U_0 — некоторая средняя энергия взаимодействия, т. е. средняя глубина ямы, получим по порядку величины:

$$U_0 \approx -\frac{\hbar^2}{m_p r_0^2} \sim -40\ \textit{Мэв}.$$

§ 77. Теория ядерных оболочек

В отличие от атомов, у которых взаимодействие между электронами имеет второстепенный характер и происходит на фоне основного фактора — притяжения к ядру, в атомных ядрах нет выделенного центра взаимодействий.

Наоборот, все ядерные частицы — нуклоны — интенсивно взаимодействуют между собой мощными ядерными силами. Поэтому долгое время казалось, что различать состояния индивидуальных частиц в ядре не имеет смысла, а можно говорить лишь о состоянии системы как целого.

Оказалось, однако, что целый ряд наблюдавшихся свойств атомных ядер указывает на сохранение индивидуальности нуклонов в ядрах. По-видимому, сохранение индивидуальности частиц в ядрах связано с тем, что ядерные силы весьма быстро убывают с расстоянием, а кинетическая энергия нуклонов в ядрах весьма велика.

Исходя из предположения, что каждый из ядерных нуклонов движется в самосогласованном поле, образованном всеми остальными нуклонами, оказалось возможным объяснить целый ряд важных свойств ядер.

Самосогласованное поле большинства ядер является сферически-симметричным. Разумеется, точный закон распределения потенциала внутри ядра неизвестен. Оказалось, однако, что характер расположения уровней сравнительно мало зависит от