ГЛАВА XI

ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

§ 83. Амплитуда и сечение рассеяния

Процессом рассеяния мы будем называть отклонение частиц от первоначального направления движения, вызванное взаимодействием с некоторой системой, которую мы будем именовать рассеивателем.

Изучение процессов рассеяния заряженных и незаряженных частиц является одним из основных экспериментальных методов исследования строения атомов, атомных ядер и элементарных частиц.

Действительно, само существование атомного ядра было установлено в опытах Резерфорда по рассеянию α-частиц. Анализ результатов наблюдения над рассеиванием нейтронов ядрами позволил Н. Бору сформулировать современные представления о строении ядра. Изучение законов рассеяния быстрых частиц является основным источником сведений о ядерных силах и о свойствах элементарных частиц.

Из приведенных, хотя и далеко не полных, примеров легко оценить значение теории рассеяния, которая является одним из важнейших разделов квантовой механики.

Рассеяние потока частиц характеризуется дифференциальным эффективным сечением рассеяния. Эта величина определяется как отношение числа частиц $dN_{\text{расс}}$, рассеянных в единицу времени в телесный угол $d\Omega$, к плотности потока $j_{\text{пад}}$ падающих частиц, т. е. дифференциальное эффективное сечение определяется соотношением

$$d\sigma(\theta, \varphi) = \frac{dN_{\text{расс}}(\theta, \varphi)}{j_{\text{пад}}},$$

где углы θ и φ определяют направление движения рассеянных частиц. Ось z направлена по движению падающих частиц.

Для наших целей удобно представить $dN_{\text{расс}}$ в виде

$$dN_{\text{расс}}(\theta, \varphi) = j_{\text{расс}}(\theta, \varphi)\, ds,$$

где $j_{\text{расс}}$ — плотность потока рассеянных частиц на больших расстояниях от рассеивающего центра, ds — элемент площади, перпендикулярный радиусу-вектору, проведенному из рассеивающего центра под углами θ, φ. Величина ds связана с элементом телесного угла $d\Omega$ равенством

$$ds = r^2\, d\Omega.$$

Дифференциальное эффективное сечение, таким образом, определено формулой

$$d\sigma = \frac{j_{\text{расс}}}{j_{\text{пад}}}\, ds. \tag{83,1}$$

Это определение эффективного сечения совпадает с тем, которое было введено в § 43 ч. I.

В квантовой механике под плотностями потоков $j_{\text{расс}}$, $j_{\text{пад}}$ подразумеваются соответствующие плотности потоков вероятности.

При взаимном рассеянии двух квантовомеханических систем, например электрона атомом, нейтрона ядром, атома атомом и т. п., следует различать упругое и неупругое рассеяние. При упругом рассеянии внутреннее состояние как рассеивающей, так и рассеиваемой систем остается неизменным. Например, при упругом рассеянии электронов на атомах состояние последних остается неизменным. При неупругом рассеянии внутреннее состояние одной или обеих систем изменяется. Например, рассеяние электронов атомами является неупругим, если в процессе рассеяния атомы переходят в возбужденное состояние.

При неупругом рассеянии часть кинетической энергии переходит во внутреннюю энергию или, наоборот, внутренняя энергия переходит в кинетическую энергию. Столкновения последнего типа называют ударами второго рода.

Мы начнем изложение теории рассеяния с более простого случая упругого рассеяния. При упругом рассеянии можно не интересоваться внутренним состоянием систем и кратко именовать частицами любые взаимодействующие системы (хотя последние могут иметь сложное внутреннее строение, например являться атомами, молекулами или ядрами).

В процессе рассеяния имеет место взаимодействие двух частиц — рассеиваемой и рассеивающей. При этом очень часто энергия взаимодействия и зависит только от расстояния между частицами. В этом случае задача о движении двух взаимодействующих частиц всегда может быть сведена к изучению движения одной частицы (с приведенной массой μ) в поле неподвижного центра сил и движению центра тяжести системы.

На практике всегда необходимо знать, как происходит процесс в лабораторной системе координат. Поэтому если задача о движении одной частицы в поле внешних сил решена, то в окончательных формулах следует перейти к лабораторной системе. Это можно сделать легко, зная закон преобразования углов (см. § 43 ч. I)

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{m_1 \sin\theta}{m_1 + m_2\cos\theta}; \quad \theta_2 = \frac{\pi - \theta}{2}. \tag{83,2}$$

Здесь θ — угол рассеяния двух частиц в системе центра инерции. θ_1 и θ_2 — углы рассеяния первой и второй частиц в лабораторной системе, в которой вторая частица до столкновения покоилась.

Перейдем к написанию волновой функции частицы, рассеивающейся на силовом центре. Мы не будем пока делать предположений о конкретном виде потенциальной энергии взаимодействия.

Поместим неподвижный рассеивающий центр в начало координат. Направление потока падающих частиц примем за ось z. Вдали от рассеивающего центра падающая частица движется как свободная, и ее волновая функция имеет вид плоской волны e^{ikz}. Вблизи силового центра частица испытывает рассеяние и вид ее волновой функции изменяется.

Однако после того, как рассеянная частица уйдет достаточно далеко от центра сил, она вновь будет двигаться как свободная. Так как поток рассеянных частиц на большом расстоянии всегда будет направлен от центра рассеяния, то движение рассеянных частиц должно описываться расходящейся волной $f(\theta, \varphi)\frac{e^{ikr}}{r}$.

Полную волновую функцию, описывающую движение падающей и рассеянной частиц на больших расстояниях от рассеивающего центра, можно представить в виде

$$\psi = e^{ikz} + f(\theta, \varphi)\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{83,3}$$

где первый член описывает движение падающих частиц, а второй — рассеянных.

Амплитуда расходящейся волны $f(\theta, \varphi)$, именуемая амплитудой рассеяния, зависит, вообще говоря, от углов θ и φ. Согласно (83,1) следует вычислить плотности потоков падающих и рассеянных частиц. Плотность потока в плоской волне e^{ikz}, падающей на рассеивающий центр, в соответствии с формулой (7.6) равна $\frac{p}{m} = v$, где v — скорость частицы. Плотность потока в расходящейся волне дается выражением

$$\frac{|f(\theta, \varphi)|^2 v}{r^2}. \tag{83,4}$$

Определяя отношение падающего и рассеянного потоков, получаем в соответствии с формулой (83,1) дифференциальное эффективное сечение

$$d\sigma = |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega. \qquad (83,5)$$

Мы видим, таким образом, что эффективное сечение полностью определяется величиной амплитуды рассеяния. Вычисление последней производится обычно следующим образом. Находится решение уравнения Шредингера для движения частицы в поле рассеивающего центра, которое на больших расстояниях от центра имеет вид (83,3). Тогда коэффициент при множителе $\frac{e^{ikr}}{r}$ дает искомую амплитуду рассеяния.

Представление волновой функции, описывающей движение частицы вдали от рассеивающего центра в виде (83,3), т. е. в виде суммы падающей и расходящейся волн, было произведено на основании простых и наглядных физических соображений.

Можно, однако, строго показать, что вдали от неподвижного рассеивающего центра $U(\boldsymbol{r})$ решение уравнения Шредингера действительно может иметь вид (83,3). Для этого запишем уравнение Шредингера в виде

$$(\Delta + k^2)\psi = \frac{2mU}{\hbar^2}\psi,$$

где $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, а m и E — соответственно масса и энергия рассеивающейся частицы. С помощью функции Грина решение можно (см. § 15) записать в форме

$$\psi = \psi_0 + \int G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\frac{2m}{\hbar^2}U(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\,dV', \qquad (83,6)$$

где функция ψ_0 удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + k^2)\psi_0 = 0.$$

Решение последнего уравнения, очевидно, имеет вид плоской волны e^{ikz}.

Функция Грина удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + k^2)\,G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}').$$

Последнее уравнение формально идентично с уравнением (24,20) ч. I, если заменить в нем $\frac{\omega^2}{c^2}$ на k^2 и $-\frac{4\pi j}{c}$ на $\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$. Не повторяя выкладок § 24 ч. I, воспользуемся формулой (24,22) ч. I и напишем решение для $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ в виде

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\delta(\boldsymbol{r}'' - \boldsymbol{r}')\,e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|}\,dV''}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}''|}.$$

Выполняя интегрирование по dV'', получаем

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$$

Подставляя в (83,6) значения ψ и G, приходим к интегральному уравнению

$$\psi = e^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}U(\boldsymbol{r}')\,\psi(\boldsymbol{r}')\,dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \qquad (83,7)$$

Рассмотрим далее интеграл, входящий в формулу (83,7), и определим его значения на больших расстояниях r. Определим большие расстояния следующим образом. Пусть область значений $\boldsymbol{r}'$, в которой подынтегральная функция заметно отлична от нуля и которая дает основной вклад в значение интеграла, имеет размеры R. Расстояния $|\boldsymbol{r}|$, для которых выполнено неравенство

$$|\boldsymbol{r}| \gg R, \qquad (83,8)$$

будем называть большими[1]). При вычислении интеграла (83,7) на больших расстояниях можно считать, что $|\boldsymbol{r}| \gg |\boldsymbol{r}'|$.

Разлагая $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ в ряд, имеем

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| = \sqrt{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2} = \sqrt{r^2 - 2\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'} = r - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r}.$$

Подставляя это разложение в (83,7), находим

$$\psi = e^{ikz} - \frac{me^{ikr}}{2\pi\hbar^2 r}\int U(\boldsymbol{r}')\,e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}'}\,\psi(\boldsymbol{r}')\,dV'. \qquad (83,9)$$

Здесь обозначено

$$\boldsymbol{k} = \frac{k\boldsymbol{r}}{r}.$$

Волновой вектор $\boldsymbol{k}$ направлен, очевидно, по радиусу-вектору. Он характеризует направление распространения расходящейся шаровой волны. Сравнение (83,9) с (83,3) убеждает нас в том, что последнее выражение имеет общий характер. Амплитуда рассеяния при этом равна

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U(\boldsymbol{r}')\,\psi(\boldsymbol{r}')\,e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}'}\,dV'. \qquad (83,10)$$

Формулы (83,9) и (83,10) потребуются нам для дальнейшего.

§ 84. Формула Борна

Хотя нам удалось найти асимптотическое выражение волновой функции, задача о получении конкретного вида амплитуды

[1]) Такие расстояния всегда существуют при достаточно быстром убывании $U(r)$.