Выполняя интегрирование по dV'', получаем

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$$

Подставляя в (83,6) значения ψ и G, приходим к интегральному уравнению

$$\psi = e^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}U(\boldsymbol{r}')\,\psi(\boldsymbol{r}')\,dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \qquad (83,7)$$

Рассмотрим далее интеграл, входящий в формулу (83,7), и определим его значения на больших расстояниях r. Определим большие расстояния следующим образом. Пусть область значений $\boldsymbol{r}'$, в которой подынтегральная функция заметно отлична от нуля и которая дает основной вклад в значение интеграла, имеет размеры R. Расстояния $|\boldsymbol{r}|$, для которых выполнено неравенство

$$|\boldsymbol{r}| \gg R, \qquad (83,8)$$

будем называть большими[1]. При вычислении интеграла (83,7) на больших расстояниях можно считать, что $|\boldsymbol{r}| \gg |\boldsymbol{r}'|$.

Разлагая $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ в ряд, имеем

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| = \sqrt{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2} = \sqrt{r^2 - 2\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'} = r - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r}.$$

Подставляя это разложение в (83,7), находим

$$\psi = e^{ikz} - \frac{me^{ikr}}{2\pi\hbar^2 r}\int U(\boldsymbol{r}')\,e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}'}\,\psi(\boldsymbol{r}')\,dV'. \qquad (83,9)$$

Здесь обозначено

$$\boldsymbol{k} = \frac{k\boldsymbol{r}}{r}.$$

Волновой вектор $\boldsymbol{k}$ направлен, очевидно, по радиусу-вектору. Он характеризует направление распространения расходящейся шаровой волны. Сравнение (83,9) с (83,3) убеждает нас в том, что последнее выражение имеет общий характер. Амплитуда рассеяния при этом равна

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U(\boldsymbol{r}')\,\psi(\boldsymbol{r}')\,e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}'}\,dV'. \qquad (83,10)$$

Формулы (83,9) и (83,10) потребуются нам для дальнейшего.

§ 84. Формула Борна

Хотя нам удалось найти асимптотическое выражение волновой функции, задача о получении конкретного вида амплитуды

---

[1]) Такие расстояния всегда существуют при достаточно быстром убывании $U(r)$.

рассеяния еще далека от решения. Действительно, амплитуда рассеяния согласно формуле (83,10) выражается через неизвестную волновую функцию ψ. Точное решение уравнения Шредингера и нахождение $f(\theta, \varphi)$ в большинстве практически интересных задач сопряжено с огромными математическими трудностями. Поэтому в теории рассеяния широко применяются приближенные методы. Важнейшим из них является метод Борна. В основе этого метода лежит предположение о том, что потенциальная энергия взаимодействия рассеянной частицы с центром сил мала, так что ее можно рассматривать как малое возмущение.

Если потенциальная энергия является малым возмущением, то можно считать, что первоначальное движение частицы сравнительно мало изменяется. При этом интегральное уравнение (83,9) может быть без труда решено по методу последовательных приближений. В нулевом приближении малый член, содержащий потенциальную энергию, может быть опущен. Тогда

$$\psi_0 = e^{ikz} = e^{i\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r}}, \qquad (84,1)$$

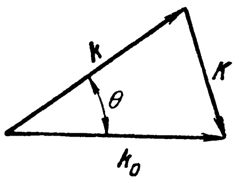

Рис. 24.

где $\boldsymbol{k}_0$ — вектор, равный $\boldsymbol{k}_0 = k\boldsymbol{n}_0$; $\boldsymbol{n}_0$ — орт вдоль оси z. В первом приближении вместо волновой функции в правой части (83,9) должно быть подставлено значение ее нулевого приближения (84,1). Получаем

$$\psi = e^{ikz} - \frac{me^{ikr}}{2\pi\hbar^2 r} \int U(\boldsymbol{r}')\, e^{ikz' - i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}'}\, dV'. \qquad (84,2)$$

В этом приближении амплитуда рассеяния равна

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int U(\boldsymbol{r}')\, e^{i\boldsymbol{K}\boldsymbol{r}'}\, dV'. \qquad (84,3)$$

При этом мы ввели обозначение

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k}, \qquad (84,4)$$

где модуль вектора $\boldsymbol{K}$ в соответствии с рис. 24 определяется соотношением

$$K = k\,|\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}_0| = 2k \sin\frac{\theta}{2} = \frac{2mv}{\hbar} \sin\frac{\theta}{2}. \qquad (84,5)$$

Вектор $\boldsymbol{K}$ часто называют вектором столкновений. Соответственно вектор $\boldsymbol{P} = \hbar\boldsymbol{K}$ носит название вектора передачи импульса. Если потенциальная энергия не зависит от углов $U = U(|\boldsymbol{r}|)$, то в (84,3) можно выполнить интегрирование по углам:

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty U(|\mathbf{r}'|)r'^2\,dr'\int_0^\pi e^{iKr'\cos\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi =$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^\infty U(|\mathbf{r}'|)\frac{\sin Kr'}{Kr'}r'^2\,dr'. \qquad (84,6)$$

В первом приближении амплитуда рассеяния определяется потенциальной энергией в первой степени. Тогда, если подставить (84,3) в определение (83,5), найдем

$$d\sigma = |f(\theta)|^2\,d\Omega = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4}\left|\int U(|\mathbf{r}'|)\,e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}'}\,dV'\right|^2 d\Omega =$$

$$= \frac{4m^2}{\hbar^4}\left|\int_0^\infty U(|\mathbf{r}'|)\frac{\sin Kr'}{Kr'}r'^2\,dr'\right|^2 d\Omega. \qquad (84,7)$$

Выражение (84,7) носит название формулы Борна. Она находит широкое применение в ядерной физике.

Продолжая последовательные приближения, т. е. подставляя в (83,9) волновую функцию ψ из (84,2), можно было бы найти волновую функцию и амплитуду рассеяния во втором приближении. Добавка к амплитуде рассеяния во втором приближении определялась бы интегралом от квадрата потенциальной энергии взаимодействия. Аналогично могут быть найдены поправки следующих порядков.

При малых значениях угла рассеяния имеем из (84,7)

$$d\sigma = \frac{4m^2}{\hbar^4}\left|\int_0^\infty U(|\mathbf{r}'|)\,r'^2\,dr'\right|^2 d\Omega,$$

т. е. сечение оказывается не зависящим от скорости частицы. В следующем параграфе будет дан пример конкретного расчета сечения по формуле Борна. Перейдем теперь к обсуждению применимости формулы Борна.

Для быстрой сходимости ряда последовательных приближений нужно, чтобы поправка к волновой функции первого приближения ψ_1 была мала по сравнению с волновой функцией нулевого приближения ψ_0, т. е. должно выполняться условие

$$|\psi_1| \ll |\psi_0|. \qquad (84,8)$$

С помощью (83,7) можно найти значение функции ψ_1, справедливое при произвольных значениях r; тогда (84,8) запишется в виде

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int \frac{e^{ikz'}e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}U(\boldsymbol{r}')\,dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right| \ll 1. \tag{84,9}$$

Поскольку $\psi_1(\boldsymbol{r})$ убывает с увеличением расстояния от рассеивающего центра, то условие (84,9) будет выполнено, если оно выполняется в начале координат. Поэтому условие (84,9) можно заменить неравенством

$$|\psi_1(0)| = \frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int \frac{e^{ik(r'+z')}U(r')\,dV'}{r'}\right| \ll 1. \tag{84,10}$$

Дальнейшие оценки интеграла можно привести в двух предельных случаях:

1. При выполнении соотношений $kR \ll 1$, где R — эффективный радиус взаимодействия. Это соответствует малым энергиям частиц

$$E \ll \frac{\hbar^2}{mR^2}.$$

2. При выполнении обратного неравенства $kR \gg 1$. Это соответствует условию

$$E \gg \frac{\hbar^2}{mR^2}.$$

В первом случае при оценке интеграла можно положить в (84,10) $e^{ik(r'+z')} \approx 1$.

Тогда (84,10) дает по порядку величины

$$\frac{m}{\hbar^2}\int \frac{|U(r')|\,dV'}{r'} \approx \frac{m}{\hbar^2}|U_0|R^2 \ll 1.$$

Здесь U_0 — некоторое среднее значение энергии взаимодействия в области R.

Запишем последнее соотношение в виде

$$U_0\Big/\frac{\hbar^2}{mR^2} \ll 1. \tag{84,11}$$

Согласно (37,9) выражение $\frac{\hbar^2}{mR^2}$ по порядку величины равно минимальной глубине потенциальной ямы радиуса R, при которой возникает уровень. Мы видим, что условия применимости формулы Борна для рассеяния медленных частиц имеет простой смысл. Именно, средняя энергия взаимодействия должна быть мала по сравнению с минимальной потенциальной энергией частицы в яме, при которой образуется связанное состояние.

В случае большой энергии частицы область применимости формулы Борна значительно расширяется. Экспоненциальный множитель в формуле (84,10) весьма быстро осциллирует, что приводит к уменьшению общего значения интеграла.

При вычислении интеграла можно вывести медленно изменяющиеся множители за знак интеграла, написав

$$|\psi_1(0)| \approx \frac{m}{2\pi\hbar^2}|U_0|\left|\int\int \frac{e^{ikz'}e^{ikr'}\,dV'}{r'}\right| =$$
$$= \frac{m|U_0|}{\hbar^2}\left|\int_0^R\int_0^\pi e^{ikr'(1+\cos\theta)}\sin\theta\, d\theta r'\, dr'\right| =$$
$$= \frac{m|U_0|}{\hbar^2 k}\left|\int_0^R (1-e^{2ikr'})\,dr'\right| \approx \frac{m|U_0|R}{\hbar^2 k} \ll 1.$$

При этом мы опустили интеграл от быстро осциллирующей величины $e^{2ikr'}$, как малый по сравнению с оставленным.

Переписав последнее неравенство в виде

$$\frac{|U_0|R}{\hbar v} \ll 1, \qquad (84,12)$$

мы видим, что формула Борна справедлива для частиц, имеющих тем более высокую энергию, чем больше произведение U_0R, определяющееся свойствами рассеивающегося центра.

В важном случае кулоновского поля потенциал $\frac{Ze^2}{r}$ спадает так медленно, что нельзя ввести понятие об эффективном размере области взаимодействия R.

Однако заметим, что при $U_0 = \frac{Ze^2}{R}$ входящее в неравенство (84,12) произведение U_0R от R не зависит.

Поэтому в кулоновском поле неравенство (84,12) приобретает вид

$$\frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1. \qquad (84,13)$$

Неравенство (84,13) имеет наглядный смысл: если ввести скорость электрона на первой боровской орбите водородоподобного атома с зарядом ядра Ze — величину $v_k = \frac{Ze^2}{\hbar}$, то формула (84,13) приобретает вид

$$\frac{v_k}{v} \ll 1, \qquad (84,14)$$

т. е. скорость частицы должна быть велика по сравнению со скоростью электрона на первой боровской орбите.

Неравенство (84,13) требует для применимости формулы Борна тем бо́льших энергий, чем больше заряд рассеивающего ядра.