Применим это правило к исследованию рассеяния медленной частицы. Пусть рассеивающий центр создает поле, эффективное действие которого простирается на область R. Под медленными мы будем понимать частицы с волновым числом k, для которого $kR \ll 1$.

В этом случае

$$\rho_l > R, \tag{86,15}$$

для всех значений $l > 0$. Все фазы, кроме δ_0, малы. Мы видим, таким образом, что для рассеяния медленных частиц существенную роль играет только S-рассеяние.

Дифференциальное эффективное сечение при этом равно

$$d\sigma = \frac{1}{4k^2} \mid e^{2i\delta_0} - 1 \mid^2 d\Omega = \frac{\sin^2 \delta_0}{k^2} d\Omega, \tag{86,16}$$

поскольку $P_0(0) = 1$.

Эффективное сечение S-рассеяния не зависит от угла рассеяния. Это означает, что рассеяние является сферически-симметричным. С увеличением энергии частицы начинают играть роль фазы более высокого порядка и рассеяние постепенно приобретает все более асимметричный характер.

При больших энергиях эффективное сечение становится существенно отличным от нуля только для очень малых углов θ. Это лучше всего можно увидеть с помощью формулы Борна (84,3). При больших энергиях вектор $\boldsymbol{K}$ велик, интеграл быстро осциллирует, и поэтому эффективное сечение мало́. При $\theta = 0$ вектор $\boldsymbol{K}$ равен нулю и осцилляция отсутствует, а эффективное сечение велико. Заметим, наконец, что фазовая теория рассеяния в том виде, как она изложена здесь, неприменима к рассеянию в кулоновском поле. Волновая функция в этом случае не имеет асимптотического вида (83,3). Это обстоятельство связано с очень медленным падением кулоновского потенциала как функции расстояния. Указанный случай требует особого рассмотрения[1]).

§ 87. Рассеяние сферической потенциальной ямой (понятие о резонансном рассеянии)

В качестве примера использования фазовой теории рассеяния рассмотрим рассеяние частицы в потенциальном поле, которое определим следующим образом:

$$\begin{aligned} U &= -U_0 \quad \text{при} \quad r < R, \\ U &= 0 \qquad \text{при} \quad r > R. \end{aligned} \tag{87,1}$$

[1]) Точное решение этой задачи см., например в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, 1963, стр. 597.

Для простоты мы ограничимся случаем, когда рассеиваемая частица имеет малую энергию, т. е. $kR \ll 1$, $E \ll U_0$. В этом случае, как мы знаем, существенно S-рассеяние, и нам потребуется определить только фазу δ_0. В случае потенциального поля, заданного формулой (87,1), решение задачи не представляет труда. С помощью найденных соотношений мы сможем проиллюстрировать также весьма интересное явление, возникающее в процессе рассеяния, так называемое резонансное рассеяние. Оно заключается в том, что эффективное сечение рассеяния при известных условиях оказывается весьма большим. Этот эффект имеет место тогда, когда в потенциальном поле существует уровень энергии, близкий к нулю, а энергия рассеиваемой частицы достаточно мала.

Представим волновую функцию в виде $\psi = A_0 R_0(r) = \frac{\chi}{r}$. Функция $\chi(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + k^2\chi = 0 \quad \text{при} \quad r > R, \tag{87,2}$$

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \beta^2\chi(r) = 0 \quad \text{при} \quad r < R, \tag{87,3}$$

где

$$\beta^2 = \frac{2m(E + U_0)}{\hbar^2}.$$

Вид функции χ при $r > R$ легко получается из решения уравнения (87,2):

$$\chi = C\sin(kr + \delta_0). \tag{87,4}$$

В общем случае функция χ имеет вид (87,4) только на больших расстояниях [ср. с формулой (86,2)]. Однако в нашем случае в силу резкой границы потенциальной энергии функция R_0 имеет вид (86,2) на всех расстояниях $r > R$.

При $r < R$ получаем

$$\chi = A\sin\beta r + B\cos\beta r,$$

где A и B — постоянные. Функция R_0 должна оставаться конечной при $r \to 0$. Поэтому коэффициент B следует положить равным нулю. Таким образом, получаем

$$\chi = A\sin\beta r \quad \text{при} \quad r < R.$$

В точке $r = R$ функция ψ и ее первая производная должны быть непрерывны. Эти два соотношения удобно заменить равенством логарифмических производных. Тогда найдем

$$\beta\,\mathrm{ctg}\,\beta R = k\,\mathrm{ctg}(kR + \delta_0). \tag{87,5}$$

Мы, таким образом, получили трансцендентное уравнение для фазы δ_0. Предположим вначале, что фаза δ_0 мала. Тогда $\mathrm{ctg}(kR + \delta_0)$ можно разложить в ряд по малому аргументу

$kR + \delta_0$. Имеем в результате:

$$\beta \operatorname{ctg} \beta R = \frac{k}{kR + \delta_0},$$

откуда можно найти фазу δ_0, которая равна

$$\delta_0 = \frac{k}{\beta \operatorname{ctg} \beta R} - kR. \tag{87,6}$$

Из соотношения (87,6) мы видим, что фаза действительно будет значительно меньше единицы, если выполняется соотношение

$$\frac{k}{\beta \operatorname{ctg} \beta R} \ll 1. \tag{87,7}$$

Дифференциальное эффективное сечение легко можно найти, используя формулу (86,16) и помня, что $\delta_0 \ll 1$. Оно имеет вид

$$d\sigma = \frac{\delta_0^2}{k^2}\, d\Omega = \frac{1}{k^2}\left(\frac{k}{\beta \operatorname{ctg} \beta R} - kR\right)^2 d\Omega.$$

Возможен, однако, такой вид потенциальной ямы, для которой $\beta \operatorname{ctg} \beta R$ приближается к нулю. В этом случае неравенство (87,7) нарушается, а фаза δ_0 велика. Для того чтобы выяснить условия, при которых фаза δ_0 велика, установим связь между величиной $\beta \operatorname{ctg} \beta R$, входящей в формулу (87,5), и уровнем энергии частицы, находящейся в связанном состоянии. В § 37 мы получили для уровней энергии частицы, находящейся в потенциальной яме, формулу (37,6),

$$\frac{2m(U_0 - \varepsilon)}{\hbar^2} \operatorname{ctg}^2 \sqrt{\frac{2m(U_0 - \varepsilon) R^2}{\hbar^2}} = \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}, \tag{87,8}$$

где ε — уровень энергии частицы в яме. Если уровень энергии частицы в яме близок к нулю, т. е. $\varepsilon \ll U_0$, то соотношение (87,8) переписывается в виде

$$\frac{2mU_0}{\hbar^2} \operatorname{ctg}^2 \sqrt{\frac{2mU_0R^2}{\hbar^2}} = \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}. \tag{87,9}$$

В рассматриваемом случае энергия рассеиваемой частицы также невелика ($E \ll U_0$), поэтому соотношение (87,9) можно записать в форме

$$\beta^2 \operatorname{ctg}^2 \beta R = \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}. \tag{87,10}$$

Мы видим, таким образом, что рост фазы δ_0 связан с наличием близко расположенного к нулю уровня энергии ε.

Перейдем теперь к вычислению фазы в том случае, когда соотношение (87,7) нарушается, а фаза δ_0 велика. Обозначим это значение фазы через $\delta_{0.\,\mathrm{p}}$. Найдем $\delta_{0.\,\mathrm{p}}$ опять из соотношений

(87,5). Для этого $\operatorname{ctg}(kR + \delta_{\text{o. p}})$ разложим в ряд по малому параметру kR и ограничимся нулевым членом разложения. При этом получим:

$$\beta \operatorname{ctg} \beta R = k \operatorname{ctg} \delta_{\text{o. p}}.$$

Возводя полученное соотношение в квадрат и используя формулу (87,10), найдем

$$\operatorname{ctg}^2 \delta_{\text{o. p}} = \frac{\varepsilon}{E}. \tag{87,11}$$

Мы видим теперь, что фаза $\delta_{\text{o. p}}$ не будет малой величиной, если $\varepsilon < E$.

Эффективное сечение рассеяния найдем с помощью общей формулы (86,16). Имеем в этом случае

$$\sigma_{\text{p}} = \frac{4\pi \sin^2 \delta_{\text{o. p}}}{k^2} = \frac{2\pi\hbar^2}{m(E+\varepsilon)}. \tag{87,12}$$

Последнее выражение носит название формулы Вигнера. Легко заметить, что эффективное сечение в случае резонанса значительно больше сечения в случае отсутствия последнего. Отношение сечений равно

$$\frac{\sigma_{\text{p}}}{\sigma} = \frac{\sin^2 \delta_{\text{o. p}}}{\delta_0^2}.$$

Так как $\delta_0 \ll 1$, а $\sin \delta_{\text{o. p}}$, как это видно из формулы (87,11), при $\varepsilon \approx E$ близок к единице, то очевидно, что

$$\frac{\sigma_{\text{p}}}{\sigma} \gg 1.$$

Мы получили формулу (87,12) для частного вида потенциальной энергии. Необходимо отметить, однако, что зависимость эффективного сечения от ε (87,12) является общей и не связана с конкретным видом потенциальной энергии [1]).

Резонансное рассеяние имеет место и в том случае, когда система не имеет реального, близкого к нулю уровня, но конфигурация поля близка к той, при которой такой уровень появляется. Такой ситуации отвечает положительность функции $\operatorname{ctg} \beta R$, в то время как реальному уровню обязательно отвечает случай $\operatorname{ctg} \beta R < 0$ (см. § 37). Соотношение (87,10) содержит $\operatorname{ctg}^2 \beta R$ и поэтому выполняется независимо от знака функции $\operatorname{ctg} \beta R$. В том случае, когда $\operatorname{ctg} \beta R \geqslant 0$, рассеяние происходит не на реальном, а на виртуальном уровне.

---

[1]) Более общий вывод формулы для резонансного рассеяния см. в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, 1963, стр. 584.

С помощью полученных соотношений можно легко найти также дифференциальное эффективное рассеяние на потенциальном барьере, т. е. на потенциальном поле, имеющем следующий вид:

$$U = 0 \quad \text{при} \quad r > R,$$
$$U = |U_0| \quad \text{при} \quad r < R.$$

Для этого достаточно провести замену $\beta \to i\beta$. Тогда для дифференциального эффективного сечения получим

$$d\sigma = \frac{1}{|\beta|^2}(\operatorname{th}|\beta|R - |\beta|R)^2 d\Omega. \qquad (87,13)$$

Формула (87,13) упрощается в случае бесконечно высокого потенциального барьера $U_0 \to \infty$. В этом случае для полного эффективного сечения найдем следующее выражение:

$$\sigma = 4\pi R^2. \qquad (87,14)$$

Интересно заметить, что эффективное сечение рассеяния в этом случае в четыре раза больше геометрических размеров рассеивателя.

§ 88. Упругое рассеяние тождественных частиц

До сих пор мы предполагали, что рассеиваемая частица и рассеиватель являются различными частицами. Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда рассеивающая и рассеиваемая частицы являются тождественными. Тождественность частиц, как мы сейчас увидим, существенно сказывается на процессе рассеяния. Мы начнем с рассмотрения частиц со спином, равным нулю. Предположим сначала, что тождественные частицы движутся навстречу друг другу с равными скоростями. В этом случае центр инерции системы покоится и волновая функция системы будет в соответствии с (14,14) иметь вид

$$\psi = \psi(x, y, z)$$

и зависеть только от относительных координат. Волновая функция $\psi_0(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + U(r)\right]\psi = E\psi(x, y, z). \qquad (88,1)$$

Приведенная масса двух одинаковых частиц равна $\mu = m/2$. Мы не можем для нашего случая писать волновую функцию в виде

$$\psi = e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r}e^{ikr},$$

так как эта функция не удовлетворяет требованиям симметрии.