С помощью полученных соотношений можно легко найти также дифференциальное эффективное рассеяние на потенциальном барьере, т. е. на потенциальном поле, имеющем следующий вид:

$$U = 0 \quad \text{при} \quad r > R,$$
$$U = |U_0| \quad \text{при} \quad r < R.$$

Для этого достаточно провести замену $\beta \to i\beta$. Тогда для дифференциального эффективного сечения получим

$$d\sigma = \frac{1}{|\beta|^2}(\operatorname{th}|\beta| R - |\beta| R)^2 d\Omega. \tag{87,13}$$

Формула (87,13) упрощается в случае бесконечно высокого потенциального барьера $U_0 \to \infty$. В этом случае для полного эффективного сечения найдем следующее выражение:

$$\sigma = 4\pi R^2. \tag{87,14}$$

Интересно заметить, что эффективное сечение рассеяния в этом случае в четыре раза больше геометрических размеров рассеивателя.

§ 88. Упругое рассеяние тождественных частиц

До сих пор мы предполагали, что рассеиваемая частица и рассеиватель являются различными частицами. Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда рассеивающая и рассеиваемая частицы являются тождественными. Тождественность частиц, как мы сейчас увидим, существенно сказывается на процессе рассеяния. Мы начнем с рассмотрения частиц со спином, равным нулю. Предположим сначала, что тождественные частицы движутся навстречу друг другу с равными скоростями. В этом случае центр инерции системы покоится и волновая функция системы будет в соответствии с (14,14) иметь вид

$$\psi = \psi(x, y, z)$$

и зависеть только от относительных координат. Волновая функция $\psi_0(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + U(r)\right]\psi = E\psi(x, y, z). \tag{88,1}$$

Приведенная масса двух одинаковых частиц равна $\mu = m/2$. Мы не можем для нашего случая писать волновую функцию в виде

$$\psi = e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r}e^{ikr},$$

так как эта функция не удовлетворяет требованиям симметрии.

В самом деле, перестановке двух частиц местами, т. е. замене $x_1 \to x_2$; $y_1 \to y_2$, $z_1 \to z_2$, соответствует согласно (14,6) преобразование $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$. При этом модуль вектора $\boldsymbol{r}$ не изменяется, а угол θ заменяется на $\pi - \theta$. Учитывая последнее преобразование, легко найти, что симметризованная волновая функция должна иметь вид

$$\psi_s = e^{ikz} + e^{-ikz} + \frac{e^{ikr}}{r}[f(\theta) + f(\pi - \theta)]. \qquad (88,2)$$

Расходящаяся волна опять описывает рассеянные частицы. Дифференциальное эффективное сечение рассеяния дается теперь выражением

$$d\sigma = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 d\Omega = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \qquad (88,3)$$

Таким образом, мы нашли дифференциальное эффективное сечение процесса, при котором одна из сталкивающихся тождественных частиц рассеивается на угол θ по отношению к направлению первоначального полета.

Из формулы (88,3) следует, что число частиц, рассеянных на угол θ и на угол $\pi - \theta$, одинаково. Если одна из частиц до столкновения покоилась, то дифференциальное эффективное сечение в этой системе координат может быть найдено следующим образом. В системе координат, где центр инерции покоится, дифференциальное эффективное сечение дается выражением (88,3). Переход к лабораторной системе совершается с помощью формул (83,2). В данном случае масса частиц одинакова, и мы получаем

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

и соответственно

$$\vartheta_1 = \frac{\theta}{2}, \qquad \theta = 2\vartheta_1.$$

Выражая дифференциальное эффективное сечение как функцию угла ϑ_1, находим

$$\begin{aligned} d\sigma &= |f(2\vartheta_1) + f(\pi - 2\vartheta_1)|^2 \, 4\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1 = \\ &= |f(2\vartheta_1) + f(\pi - 2\vartheta_1)|^2 \, 4\cos\vartheta_1 \, d\Omega_1, \end{aligned} \qquad (88,4)$$

где $d\Omega_1$ — элемент телесного угла в лабораторной системе.

Выражение (88,4) дает дифференциальное эффективное сечение процесса, при котором одна из частиц рассеялась в элемент телесного угла $d\Omega_1$. Поскольку обе частицы тождественны, вопрос о том, какая именно частица движется в элементе угла $d\Omega_1$ первоначально двигавшаяся, или покоившаяся, лишен физического смысла.

В качестве примера применения формулы (88,4) рассмотрим столкновение двух тождественных частиц, у которых энергия взаимодействия имеет простейший вид

$$U = U_0 \quad \text{при} \quad r < R,$$
$$U = 0 \quad \text{при} \quad r > R.$$

Будем считать, что до столкновения одна из частиц покоилась, а другая — двигалась достаточно медленно, так, чтобы выполнялось соотношение $kR \ll 1$. В этом случае $\delta_l \ll 1$ и амплитуда рассеяния в соответствии с (86,11) может быть записана в виде

$$f(\theta) = \frac{\delta_0}{k}.$$

Для дифференциального эффективного сечения рассеяния в лабораторной системе получаем

$$d\sigma = |f(2\vartheta_1) + f(\pi - 2\vartheta_1)|^2 4\cos\vartheta_1 \, d\Omega_1 = \frac{16\delta_0^2}{k^2}\cos\vartheta_1 \, d\Omega_1.$$

Мы видим, таким образом, что если в системе центра инерции рассеяние сферически-симметрично, то в лабораторной системе дифференциальное эффективное сечение пропорционально косинусу угла рассеяния.

Теория рассеяния тождественных частиц со спином, отличным от нуля, строится по такой же схеме, как и для частиц без спина. Для конкретности мы будем считать, что обе сталкивающиеся частицы имеют спин 1/2. Обобщение теории на случай произвольного спина не представляет труда.

Рассмотрим столкновение двух тождественных частиц в системе координат центра инерции в случае, когда полный спин системы равен нулю (т. е. спины частиц ориентированы антипараллельно). При этом спиновая часть волновой функции должна быть антисимметричной и, следовательно, координатная часть симметрична. Иными словами, координатную часть волновой функции можно, как и в случае частиц без спина, представить в виде

$$\psi_s = e^{ikz} + e^{-ikz} + \frac{e^{ikr}}{r}[f(\theta) + f(\pi - \theta)]. \tag{88,5}$$

Соответственно для дифференциального эффективного сечения рассеяния имеем

$$d\sigma_s = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 \, d\Omega. \tag{88,6}$$

Если полный спин равен единице (т. е. спины ориентированы параллельно), то спиновая часть волновой функции симметрична, а координатная антисимметрична. Поэтому для последней можно написать асимптотическое выражение

$$\psi_a = e^{ikz} - e^{-ikz} + \frac{e^{ikr}}{r}\left[f(\theta) - f(\pi - \theta)\right]. \tag{88,7}$$

При этом для дифференциального эффективного сечения получаем

$$d\sigma_a = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 d\Omega. \tag{88,8}$$

Выше мы рассмотрели процессы, в которых рассеиваемые частицы имели определенную ориентацию спина. Однако часто при рассеянии частицы находятся в состоянии с неопределенным спином. В этом случае обычно интересуются средним эффективным сечением, которое получается при усреднении по всем возможным спиновым состояниям. Среднее сечение для частиц со спином $1/2$ легко может быть найдено из следующих соображений. Сталкивающиеся частицы могут находиться в четырех состояниях: в одном состоянии со спином 0 и в трех состояниях со спином 1 (три возможные проекции на ось z). Поскольку все эти состояния равновероятны, то состояние со спином 0 имеет статистический вес, равный $1/4$, а вес состояния со спином 1 равен $3/4$. Поэтому среднее дифференциальное эффективное сечение можно представить в виде

$$d\sigma = \frac{1}{4}\, d\sigma_s + \frac{3}{4}\, d\sigma_a. \tag{88,9}$$

В качестве примера рассмотрим рассеяние двух медленных тождественных частиц со спином $1/2$, у которых энергия взаимодействия может быть записана в виде

$$U = U_0 \quad \text{при} \quad r < R,$$
$$U = 0 \quad \text{при} \quad r > R.$$

В случае параллельных спинов сечение рассеяния, даваемое выражением (88,8), оказывается равным нулю:

$$d\sigma_a = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 d\Omega = 0.$$

Следовательно, рассеяние частиц с параллельными спинами связано с эффектами старших порядков, т. е. P-, F- и т. д. рассеянием. Сечение рассеяния частиц с антипараллельными спинами при малых энергиях то же, что и у частиц со спином, равным нулю,

$$d\sigma_s = \frac{4\delta_0^2}{k^2}\, d\Omega.$$

Среднее эффективное сечение в соответствии с формулой (88,9) дается выражением

$$d\sigma = \frac{\delta_0^2}{k^2}\, d\Omega.$$

Мы видим, таким образом, что учет тождественности приводит к появлению существенной зависимости эффективного сечения рассеяния от взаимной ориентации их спинов.

Переход от сечений, вычисленных в системе координат центра инерции, к сечениям в лабораторной системе координат производится так же, как и у частиц без спина.

§ 89. Учет поляризации в процессах рассеяния

Все результаты, которые были получены ранее, относились к рассеянию пучков, в которых все частицы находились в одном и том же состоянии, т. е. описывались одной и той же волновой функцией. Однако частицы пучка могут находиться в разных спиновых состояниях. Мы ограничимся далее рассмотрением пучков, составленных из частиц со спином $^1/_2$, рассеиваемых на неполяризованных мишенях. Как известно, каждая из частиц пучка описывается двухкомпонентным спинором.

В § 61 было показано, что произвольное состояние частицы является в то же время состоянием с определенной проекцией спина на некоторое направление в пространстве. Иными словами, для состояния с неопределенной проекцией спина на ось z всегда найдется такая ось z', по отношению к которой указанное состояние будет состоянием с определенной проекцией спина. Мы видим, следовательно, что если пучок состоит из частиц, находящихся в одинаковом состоянии, то он будет полностью поляризован вдоль некоторого направления. Если пучок частично поляризован, то частицы описываются разными спинорами. В этом случае пучок не может быть описан с помощью волновой функции, и мы имеем смесь состояний (см. § 23). Тем не менее для описания спиновых свойств частиц пучка можно ввести некоторую функцию φ, определяемую равенством [1])

$$\varphi = c_1\varphi_1\varepsilon_1 + c_2\varphi_2\varepsilon_2 + \ldots$$

Суммирование производится по спиновым состояниям частиц пучка. Через φ_k мы обозначили спинор, описывающий группу частиц, находящихся в k-м спиновом состоянии. Коэффициент c_k определяет вес этого состояния. Он пропорционален числу частиц в данной группе. Величины ε_i и ε_k, удовлетворяющие условию $\varepsilon_i^2 = 1$ и $\varepsilon_i\varepsilon_k = 0$, введены для того, чтобы в квадратичных выражениях, определяющих средние значения, исключить интерференцию между волновыми функциями частиц, находящихся в различных спиновых состояниях. Определим вектор поляризации

[1]) L. Wolfenstein, Phys. Rev. **75**, 1664 (1943). Имеется русский перевод в сборнике «Проблемы современной физики», № 6, 1955, стр. 53.