

Мы видим, таким образом, что учет тождественности приводит к появлению существенной зависимости эффективного сечения рассеяния от взаимной ориентации их спинов.

Переход от сечений, вычисленных в системе координат центра инерции, к сечениям в лабораторной системе координат производится так же, как и у частиц без спина.

§ 89. Учет поляризации в процессах рассеяния

Все результаты, которые были получены ранее, относились к рассеянию пучков, в которых все частицы находились в одном и том же состоянии, т. е. описывались одной и той же волновой функцией. Однако частицы пучка могут находиться в разных спиновых состояниях. Мы ограничимся далее рассмотрением пучков, составленных из частиц со спином $1/2$, рассеиваемых на неполяризованных мишенях. Как известно, каждая из частиц пучка описывается двухкомпонентным спинором.

В § 61 было показано, что произвольное состояние частицы является в то же время состоянием с определенной проекцией спина на некоторое направление в пространстве. Иными словами, для состояния с неопределенной проекцией спина на ось z всегда найдется такая ось z' , по отношению к которой указанное состояние будет состоянием с определенной проекцией спина. Мы видим, следовательно, что если пучок состоит из частиц, находящихся в одинаковом состоянии, то он будет полностью поляризован вдоль некоторого направления. Если пучок частично поляризован, то частицы описываются разными спинорами. В этом случае пучок не может быть описан с помощью волновой функции, и мы имеем смесь состояний (см. § 23). Тем не менее для описания спиновых свойств частиц пучка можно ввести некоторую функцию φ , определяемую равенством ¹⁾

$$\varphi = c_1 \varphi_1 \varepsilon_1 + c_2 \varphi_2 \varepsilon_2 + \dots$$

Суммирование производится по спиновым состояниям частиц пучка. Через φ_k мы обозначили спинор, описывающий группу частиц, находящихся в k -м спиновом состоянии. Коэффициент c_k определяет вес этого состояния. Он пропорционален числу частиц в данной группе. Величины ε_i и ε_k , удовлетворяющие условию $\varepsilon_i^2 = 1$ и $\varepsilon_i \varepsilon_k = 0$, введены для того, чтобы в квадратичных выражениях, определяющих средние значения, исключить интерференцию между волновыми функциями частиц, находящихся в различных спиновых состояниях. Определим вектор поляризации

¹⁾ L. Wolfenstein, Phys. Rev. 75, 1664 (1943). Имеется русский перевод в сборнике «Проблемы современной физики», № 6, 1955, стр. 53.

как вектор спина, усредненный по пучку:

$$\mathbf{P} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\varphi^+ \boldsymbol{\sigma} \varphi}{\varphi^+ \varphi} = \frac{\sum_n |c_n|^2 \varphi_n^+ \boldsymbol{\sigma} \varphi_n}{\sum_n |c_n|^2} = \frac{\sum \varphi_n'^+ \boldsymbol{\sigma} \varphi_n'}{\sum \varphi_n'^+ \varphi_n'}, \quad (89,1)$$

где $\varphi_n' = c_n \varphi_n$.

Формула (89,1) имеет простой смысл: $(\varphi_n^+ \boldsymbol{\sigma} \varphi_n)$ представляет среднее значение вектора спина в n -м состоянии, а отношение $\frac{|c_n|^2}{\sum_n |c_n|^2}$ определяет вероятность реализации n -го состояния в пучке. Последняя вероятность равна $\frac{N_n}{N}$, где N_n — число частиц, находящихся в n -м состоянии, а N — полное число частиц в пучке.

Запишем $c_n \varphi_n$ в виде

$$c_n \varphi_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (89,2)$$

Подставляя выражение (89,2) в (89,1), легко находим компоненты вектора поляризации:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{2 \operatorname{Re} \sum_n u_n^* v_n}{\sum_n (|u_n|^2 + |v_n|^2)}, \\ P_y &= \frac{2 \operatorname{Im} \sum_n u_n^* v_n}{\sum_n (|u_n|^2 + |v_n|^2)}, \\ P_z &= \frac{\sum_n (|u_n|^2 - |v_n|^2)}{\sum_n (|u_n|^2 + |v_n|^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (89,3)$$

Если половина частиц, составляющих пучок, поляризована в каком-нибудь направлении, например, в положительном направлении оси z , а другая половина — в обратном направлении, вектор поляризации пучка \mathbf{P} будет равен нулю. Действительно, одна группа частиц описывается спиновыми функциями

$$c_1 \varphi_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда как другая группа обладает спиновыми функциями

$$c_2 \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad |c_1|^2 = |c_2|^2.$$

Подставляя эти значения в (89,3), находим, что вектор поляризации равен нулю.

Перейдем теперь к случаю рассеяния частицы со спином половина на мишени со спином 0. При этом волновая функция ψ , описывающая процесс упругого рассеивания, на больших расстояниях имеет вид

$$\psi = \varphi e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} f\varphi. \quad (89,4)$$

Здесь φ — спинор, характеризующий состояние падающей частицы; f — некоторая двухрядная матрица, зависящая от углов рассеяния. Установим ее общий вид. Прежде всего заметим, что любая двухрядная матрица может быть выражена через единичную матрицу и матрицы Паули $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, так как указанные матрицы составляют полную систему (см. § 60). Соответственно имеем

$$f = g(\theta)I + h(\theta)\sigma. \quad (89,5)$$

Дальнейший вид функций g и h может быть получен из следующих соображений. Закон преобразования первого и второго членов в формуле (89,4) при пространственных вращениях и отражениях должен быть одинаков. Поскольку первый член преобразуется как спинор, второй член в этой формуле также должен иметь характер спинора. Отсюда следует, что функция g должна быть скаляром. Поскольку оператор σ преобразуется как псевдовектор, h тоже должен быть псевдовектором. С другой стороны, псевдовектор h зависит от величин, характеризующих процесс рассеяния, и может определяться только двумя векторами, k_0 и k_1 (волновые векторы частицы до и после рассеяния). Из этих двух векторов можно построить единственный единичный псевдовектор

$$n = \frac{k_0 \times k_1}{|k_0 \times k_1|},$$

поэтому

$$h = h(\theta)n,$$

где $h(\theta)$ скаляр.

Окончательно получаем

$$f = g(\theta)I + n\sigma h(\theta). \quad (89,6)$$

Сечение упругого рассеяния, соответственно, имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \varphi^+ f^+ f \varphi = |g|^2 + |h|^2 + 2 \operatorname{Re}(g^* h) \mu n, \quad (89,7)$$

где $\mu = \varphi^+ \sigma \varphi$.

Усредним выражение (89,7) по спиновым состояниям частиц падающего пучка. Тогда, пользуясь (89,1), найдем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |g|^2 + |h|^2 + 2 \operatorname{Re}(g^*h) \mathbf{P}_{\text{пад}} \mathbf{n} = (|g|^2 + |h|^2) \left(1 + \frac{2 \operatorname{Re}(g^*h) \mathbf{P}_{\text{пад}} \mathbf{n}}{|g|^2 + |h|^2} \right), \quad (89,8)$$

где $\mathbf{P}_{\text{пад}}$ — вектор поляризации падающего пучка.

Если падающий пучок не поляризован ($\mathbf{P}_{\text{пад}} = 0$), то дифференциальное эффективное сечение равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |g|^2 + |h|^2. \quad (89,9)$$

Перейдем теперь к исследованию состояния рассеянного пучка. Подчеркнем, что после рассеяния может возникнуть поляризация пучка даже и в том случае, когда падающий пучок был не поляризован. Из общих соображений легко указать направление поляризации рассеянного пучка. Действительно, поляризация описывается псевдовектором \mathbf{P} , который может быть ориентирован только в направлении единственного псевдовектора \mathbf{n} . Следовательно, для рассеянного пучка, который был до рассеяния не поляризован, имеем

$$\mathbf{P}_{\text{расс}} = P_{\text{расс}} \mathbf{n}. \quad (89,10)$$

Определим величину поляризации рассеянного пучка. Основываясь на определении (89,1), имеем

$$\mathbf{P}_{\text{расс}} = \frac{\sum_n (f\varphi_n)^+ \sigma(f\varphi_n)}{\sum_n (f\varphi_n)^+ (f\varphi_n)} = \frac{\sum_n \varphi_n^+ f^+ \sigma f \varphi_n}{\sum_n \varphi_n^+ f^+ f \varphi_n}. \quad (89,11)$$

Поскольку, по предположению, падающий пучок не поляризован, его можно представить в виде двух пучков, состоящих из одинакового числа частиц, но с противоположно направленными спинами. Тогда суммирование по n сводится к суммированию по двум состояниям, характеризующимся противоположно направленными спинами.

Следовательно, имеем

$$\mathbf{P}_{\text{расс}} = \frac{\sum_{i=1}^2 \varphi_i^+ f^+ \sigma f \varphi_i}{\sum_{i=1}^2 \varphi_i^+ f^+ f \varphi_i}.$$

Мы видим, что для вычисления поляризации нужно найти суммы диагональных элементов (шпуры) матриц некоторых опе-

раторов. В обозначениях § 45 последнюю формулу можно переписать в виде

$$\mathbf{P}_{\text{расс}} = \frac{\text{Sp } f^+ \sigma f}{\text{Sp } f^+ f}. \quad (89,12)$$

Вычислим прежде $\text{Sp } f^+ \sigma f$. Используя для этого выражение (89,6), имеем

$$\text{Sp } f^+ \sigma f = \text{Sp} \{ [g^* I + h^* (n\sigma)] \sigma [g I + h (n\sigma)] \}.$$

Легко заметить из формул (60,15), (60,16), что $\text{Sp } \sigma_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Из соотношений типа $\sigma_x \sigma_y = i \sigma_z$ следует, что

$$\text{Sp } \sigma_i \sigma_k = 0 \quad (i \neq k).$$

Так как $\sigma_i^2 = I$, то $\text{Sp } \sigma_i^2 = 2$ ($i = 1, 2, 3$). Пользуясь этими соотношениями, получаем

$$\begin{aligned} \text{Sp } f^+ \sigma f &= \text{Sp} [g^* h \sigma (n\sigma) + h^* g (n\sigma) \sigma] = \\ &= \text{Sp} (g^* h + h^* g) (\sigma_x^2 n_x i + \sigma_y^2 n_y j + \sigma_z^2 n_z k) = 4n \text{Re} (g^* h). \end{aligned}$$

С помощью аналогичных вычислений найдем

$$\text{Sp } f^+ f = 2(|h|^2 + |g|^2).$$

Таким образом, вектор поляризации рассеянного пучка имеет вид

$$\mathbf{P}_{\text{расс}} = \frac{2 \text{Re} (g^* h)}{|g|^2 + |h|^2} \mathbf{n}; \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{k}_1}{|\mathbf{k} \times \mathbf{k}_1|}. \quad (89,13)$$

Используя (89,13) и (89,8), выразим эффективное сечение рассеяния через вектор поляризации

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (|g|^2 + |h|^2) (1 + \mathbf{P}_{\text{пад}} \mathbf{P}_{\text{расс}}), \quad (89,14)$$

где $\mathbf{P}_{\text{расс}}$ — вектор поляризации пучка рассеянных частиц в том случае, когда пучок до рассеяния был не поляризован.

Мы видим, таким образом, что эффективное сечение рассеяния зависит от поляризации падающего и рассеянного пучков. Экспериментально такие зависимости можно наблюдать в опытах по двойному рассеянию. Неполаризованный пучок частиц (рис. 25) после рассеяния поляризуется. Затем поляризованный пучок частиц падает на второй рассеиватель. При этом эффективное сечение для рассеяния налево (вектор \mathbf{k}'_2) и направо (вектор \mathbf{k}'_2) оказываются различными.

Для простоты предположим, что все векторы \mathbf{k} , \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}'_2 лежат в одной плоскости. Вектор \mathbf{n} , характеризующий поляризацию после первого рассеяния, направлен вверх перпендикулярно к плоскости чертежа. Векторы $\mathbf{P}_{\text{расс}}$, входящие в формулу (89,14), имеют противоположные направления для пучков,

рассеянных вторично налево и направо, из-за разных направлений векторов \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}'_2 . Таким образом, эффективное сечение для пучка, рассеянного налево, равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (|g|^2 + |h|^2) [1 + P_{\text{расс}}(\theta_1) P_{\text{расс}}(\theta_2)]. \quad (89,15)$$

Соответственно для пучка, рассеянного направо, имеем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (|g|^2 + |h|^2) [1 - P_{\text{расс}}(\theta_1) P_{\text{расс}}(\theta_2)]. \quad (89,16)$$

Мы видим, что отношение числа частиц, рассеянных налево и направо, определяется поляризацией $P_{\text{расс}}$. Имеем

$$R = \frac{1 + P_{\text{расс}}(\theta_1) P_{\text{расс}}(\theta_2)}{1 - P_{\text{расс}}(\theta_1) P_{\text{расс}}(\theta_2)}. \quad (89,17)$$

В качестве примера рассмотрим рассеяние нейтрона на ядре с учетом спин-орбитального взаимодействия между ними. Представление об этом взаимодействии впервые ввел Ферми для объяснения явления поляризации быстрых нейтронов. Оно имеет вид

$$\hat{H}' = V(r) + W(r) \sigma \hat{l}. \quad (89,18)$$

Здесь $V(r)$ и $W(r)$ — функции, зависящие только от радиуса. \hat{l} — оператор орбитального момента нейтрона.

Из эксперимента следует, что при ядерных взаимодействиях четность сохраняется. Оператор (89,18) построен так, чтобы он автоматически удовлетворял этому закону сохранения. Для дальнейшего удобно записать функцию $W(r)$ в виде

$$W(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} Y(r).$$

Найдем функции g и h , используя борновское приближение. Как было показано в § 84, амплитуда f в этом приближении равна

$$\begin{aligned} f &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \hat{H}'(r) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} dV = \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \left\{ V_{\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1} + \frac{\hbar}{i} \sigma \int e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \frac{dY}{r dr} [\mathbf{r} \times \nabla] e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} dV \right\}, \end{aligned}$$

где $V_{\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1}$ — компонента Фурье функции V . С помощью элементарных преобразований находим

$$f = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \left\{ V_{\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1} - \hbar \sigma \left[\mathbf{k}_0 \times \int e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}} \nabla Y dV \right] \right\}.$$

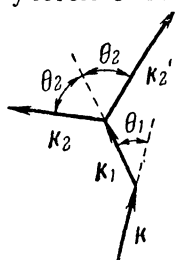


Рис. 25.

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} f &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \left\{ V_{k_0-k_1} + \hbar\sigma \left[\mathbf{k}_0 \times \int Y \nabla e^{i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{r}} dV \right] \right\} = \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \{ V_{k_0-k_1} - i\hbar\sigma [\mathbf{k}_0 \times \mathbf{k}_1] Y_{k_0-k_1} \}. \end{aligned} \quad (89,19)$$

Сравнивая (89,19) и (89,6), находим функции h и g . Они имеют вид

$$g = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} V_{k_0-k_1}, \quad h = \frac{imk^2 \sin\theta}{2\pi\hbar} Y_{k_0-k_1}. \quad (89,20)$$

Отметим, что в рассматриваемом первом приближении теории возмущений отсутствует поляризация рассеянных частиц. Действительно, подставляя соотношение (89,20) в формулу (89,13), получаем $P_{\text{расс}} = 0$. Однако при более точном вычислении $P_{\text{расс}} \neq 0$.

Более общий формализм, пригодный для рассмотрения рассеяния частиц на поляризованных мишенях, читатель найдет, например, в книге Давыдова ¹⁾.

§ 90. Переход к классическому пределу в квантовых формулах рассеяния

Преобразуем предварительно точную формулу для амплитуды рассеяния к виду, удобному для перехода к классическому пределу.

Если мы используем разложение δ -функции по полиномам Лежандра (III, 11), то амплитуда рассеяния (86,11) может быть записана в виде

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{2i\delta_l} - \frac{1}{ik} \delta(1-\cos\theta). \quad (90,1)$$

Для всех углов $\theta \neq 0$ формула (90,1) принимает вид

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{2i\delta_l}. \quad (90,2)$$

В квазиклассическом приближении радиальная часть волновой функции имеет вид (43,2)

$$R_l = \frac{A_l}{r\sqrt{p_r}} \sin \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_a^r \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{\hbar^2 \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2}} dr + \frac{\pi}{4} \right\}.$$

¹⁾ А. С. Давыдов, Теория атомного ядра, Физматгиз, 1958, стр. 350.