Интегрируя по частям, получим

$$f=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\left\{V_{k_0-k_1}+\hbar\sigma\left[k_0\times\int Y\,\nabla e^{i(k_0-k_1)r}\,dV\right]\right\}=$$
$$=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\{V_{k_0-k_1}-i\hbar\sigma\,[k_0\times k_1]\,Y_{k_0-k_1}\}. \qquad (89,19)$$

Сравнивая (89,19) и (89,6), находим функции h и g. Они имеют вид

$$g=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}V_{k_0-k_1}, \qquad h=\frac{imk^2\sin\theta}{2\pi\hbar}Y_{k_0-k_1}. \qquad (89,20)$$

Отметим, что в рассматриваемом первом приближении теории возмущений отсутствует поляризация рассеянных частиц. Действительно, подставляя соотношение (89,20) в формулу (89,13), получаем $\boldsymbol{P}_{\text{расс}}=0$. Однако при более точном вычислении $\boldsymbol{P}_{\text{расс}}\neq 0$.

Более общий формализм, пригодный для рассмотрения рассеяния частиц на поляризованных мишенях, читатель найдет, например, в книге Давыдова[1]).

§ 90. Переход к классическому пределу в квантовых формулах рассеяния

Преобразуем предварительно точную формулу для амплитуды рассеяния к виду, удобному для перехода к классическому пределу.

Если мы используем разложение δ-функции по полиномам Лежандра (III, 11), то амплитуда рассеяния (86,11) может быть записана в виде

$$f(\theta)=\frac{1}{2ik}\sum_{l=0}(2l+1)P_l(\cos\theta)e^{2i\delta_l}-\frac{1}{ik}\delta(1-\cos\theta). \qquad (90,1)$$

Для всех углов $\theta\neq 0$ формула (90,1) принимает вид

$$f(\theta)=\frac{1}{2ik}\sum_l(2l+1)P_l(\cos\theta)e^{2i\delta_l}. \qquad (90,2)$$

В квазиклассическом приближении радиальная часть волновой функции имеет вид (43,2)

$$R_l=\frac{A_l}{r\sqrt{p_r}}\sin\left\{\frac{1}{\hbar}\int_a^r\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{\hbar^2\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}}\,dr+\frac{\pi}{4}\right\}.$$

[1]) А. С. Давыдов, Теория атомного ядра, Физматгиз, 1958, стр. 350.

Выражение для R_l нужно понимать как асимптотическое выражение, т. е. считать в нем $r \to \infty$. Через a обозначена координата точки поворота, в которой полная энергия E равна сумме потенциальной и центробежной энергии, т. е.

$$E = U(a) + \frac{\hbar^2 \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{2ma^2}.$$

В § 40 в условие для определения точки поворота не была включена центробежная энергия, поскольку движение считалось одномерным.

Сравнивая выражение для R_l с формулой (86,2), мы видим, что фаза рассеяния может быть представлена в виде

$$\delta_l = \frac{1}{\hbar} \int_a^r \left(\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{\hbar^2 \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2}} - k \right) dr + \\ + \frac{\pi}{2}\left(l + \frac{1}{2}\right) - ka. \qquad (90,3)$$

В (90,3) нужно считать $r \to \infty$, $l \gg 1$. При этом значения фаз δ_l очень велики по абсолютной величине. Формула для амплитуды рассеяния (90,2) может быть упрощена, если учесть, что в квазиклассическом приближении следует считать $l \gg 1$. Тогда для полиномов Лежандра $P_l(\cos\theta)$ можно написать асимптотическое выражение при $l \gg 1$. Оно имеет вид[1])

$$P_l(\cos\theta) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi l \sin\theta}} \left[e^{i\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta + i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta - i\frac{\pi}{4}} \right].$$

Тогда для амплитуды рассеяния получаем

$$f = \frac{1}{ik} \sum_{l \gg 1} l P_l(\cos\theta)\, e^{2i\delta_l} = \frac{1}{k} \sum B(l)\left(e^{i\alpha(l)} - e^{i\beta(l)}\right), \qquad (90,4)$$

где

$$B(l) = -\sqrt{\frac{l}{2\pi\sin\theta}},$$

$$\alpha(l) = 2\delta_l + \left(l + \frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4},$$

$$\beta(l) = 2\delta_l - \left(l + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}.$$

Для получения $f(\theta)$ следует просуммировать ряды

$$\sum_l B(l)\, e^{i\alpha(l)} \quad \text{и} \quad \sum_l B(l)\, e^{i\beta(l)}.$$

---

[1]) Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, Физматгиз, 1953, стр. 256.

Мы рассмотрим один из этих рядов, поскольку, как это будет ясно из дальнейшего, в заданном поле сил (отталкивания или притяжения) только один из рядов имеет сумму, отличную от нуля. Величины $\alpha(l)$, как видно из их определения, при больших l велики. Поэтому члены ряда $\sum B(l)e^{i\alpha(l)}$, содержащие быстро осциллирующие множители, взаимно погашаются. Исключение возможно в том случае, если при некотором значении $l = l_0$ величина $\alpha(l_0)$ имеет экстремум, т. е.

$$\left.\frac{d\alpha(l)}{dl}\right|_{l=l_0} = 0. \qquad (90,5)$$

Вблизи экстремума функция $\alpha(l)$ изменяется медленно и сумма ряда сводится к сумме членов со значениями l, близкими к l_0.

В этом случае для выполнения суммирования можно заменить сумму на интеграл. В последнем подынтегральное выражение существенно отлично от нуля только при $l \approx l_0$, и интеграл можно вычислить по методу перевала (см. § 20 ч. III).

Итак, можно написать:

$$\sum_l B(l)e^{i\alpha(l)} = B(l_0)e^{i\alpha(l_0)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\gamma(l-l_0)^2}\,dl = e^{i\alpha(l_0)}B(l_0)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c(l-l_0)^2}\,dl,$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\alpha}{dl^2}\right|_{l=l_0}, \qquad c = -i\gamma. \qquad (90,6)$$

Вычисление интеграла (90,6) производится непосредственно, и мы получаем

$$\sum_l B(l)\,e^{i\alpha_l} = B(l_0)\,e^{i\alpha(l_0)}\left(\frac{i\pi}{\gamma}\right)^{1/2}. \qquad (90,7)$$

С помощью последнего соотношения амплитуда рассеяния может быть написана в виде

$$f(\theta) = \frac{B(l_0)}{k}\,e^{i\alpha(l_0)}\left(\frac{i\pi}{\gamma}\right)^{1/2}. \qquad (90,8)$$

Величину $\alpha(l_0)$ мы найдем в дальнейшем, а пока рассмотрим физический смысл уравнения (90,5). Для этого определим производную $\left.\frac{d\alpha}{dl}\right|_{l=l_0}$. С помощью соотношений (90,4) имеем

$$\left.\frac{d\alpha}{dl}\right|_{l=l_0} = 2\left.\frac{d\delta_l}{dl}\right|_{l=l_0} + \theta = 0. \qquad (90,9)$$

При дифференцировании следует помнить, что угол θ задан, и мы определяем эффективное сечение для определенной величины угла. Если провести дифференцирование по l и использовать формулу (90,3), то мы получим:

$$\left(\frac{d\delta_l}{dl}\right)_{l=l_0} = -\int\limits_a^\infty \frac{\hbar\left(l_0+\frac{1}{2}\right)dr}{r^2\sqrt{2m(E-U)-\frac{\hbar^2\left(l_0+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}}} -$$

$$-\sqrt{2m(E-U)-\frac{\hbar^2\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}}\,\Bigg|_{r=a}\left(\frac{da}{dl}\right)_{l=l_0} + k\frac{da}{dl} - k\frac{da}{dl} + \frac{\pi}{2} =$$

$$= -\int\limits_a^\infty \frac{\hbar\left(l_0+\frac{1}{2}\right)dr}{r^2\sqrt{2m(E-U)-\frac{\hbar^2\left(l_0+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}}} + \frac{\pi}{2},$$

поскольку в точке поворота $r = a$ подкоренное выражение обращается в нуль. Условие (90,9) приобретает вид

$$-\int\limits_a^\infty \frac{\hbar\left(l_0+\frac{1}{2}\right)dr}{r^2\sqrt{2m(E-U)-\frac{\hbar^2\left(l_0+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}}} + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\theta}{2} = 0. \qquad (90,10)$$

Если бы мы проводили соответствующие вычисления для второй суммы, то экстремуму $\beta(l)$ отвечал бы нижний знак в (90,10). Для краткости оба условия совмещены. Формула (90,10) определяет значение l_0.

Величина $\hbar\left(l_0+\frac{1}{2}\right) = L$ представляет собой момент количества движения. После введения момента L формулу (90,10) можно преобразовать к виду

$$\int\limits_a^\infty \frac{L\,dr}{r^2\sqrt{2m(E-U)-\frac{L^2}{r^2}}} = \frac{\pi \pm \theta}{2}. \qquad (90,11)$$

В классической механике момент количества движения может быть связан с параметром соударения ρ с помощью следующего соотношения:

$$L = m\rho v,$$

где v — скорость частицы на бесконечности. Подставляя это значение для момента количества движения в формулу (90,11), мы получаем выражение, в точности совпадающее с классическим соотношением, связывающим параметр соударения с углом рассеяния θ [1]),

$$\int\limits_{r=a}^{\infty} \frac{mv\rho\, dr}{r^2 \sqrt{2m(E-U) - \left(\frac{mv\rho}{r}\right)^2}} = \frac{\pi \pm \theta}{2}. \qquad (90,12)$$

Значение прицельного параметра ρ определяется положительным корнем уравнения (90,12). Из механики известно, что в поле сил отталкивания положительный корень этого уравнения существует только при отрицательном знаке при θ. Наоборот, в поле сил притяжения этот корень имеется при положительном знаке при θ.

Рассмотрим случай сил отталкивания. Тогда условие (90,9) может выполняться только для $\alpha(l)$, но не для $\beta(l)$. Соответственно, лишь первый из рядов в (90,4) имеет сумму, отличную от нуля.

Перейдем теперь к вычислению сечения. Согласно формулам (83,5) и (90,8) оно определяется выражением

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega = \frac{1}{k^2} |B(l_0)|^2 \frac{\pi}{|\gamma|} d\Omega.$$

Величина γ определяется выражением (90,6). С помощью (90,4) и (90,3) получим

$$\gamma = \hbar \frac{\partial^2}{\partial L^2} \int\limits_a^{\infty} \left[2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}\right]^{1/2} dr = -\frac{\partial}{\partial L} \int\limits_a \frac{L \frac{\hbar}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}}. \qquad (90,13)$$

Используя (90,11), преобразуем выражение для γ к виду

$$\gamma = \pm \frac{\hbar}{2} \frac{\partial \theta}{\partial L}.$$

Если подставить значение B из (90,4) и использовать найденное значение для γ, то дифференциальное эффективное сечение приобретает вид

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega = \frac{L}{m^2 v^2 \sin\theta} \left|\frac{\partial L}{\partial \theta}\right| d\Omega. \qquad (90,14)$$

Заменяя в (90,14) величину L на ее классическое значение, получим

$$d\sigma = \frac{\rho}{\sin\theta} \left|\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right| d\Omega. \qquad (90,15)$$

[1]) См., например, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика, Физматгиз, 1958, стр. 64.

Выражение (90,15) представляет собой обычную формулу рассеяния, даваемую классической механикой.

Перейдем теперь к выяснению границ применимости формулы для сечения рассеяния (90,15). Они могут быть установлены из следующих наглядных соображений.

О движении частицы по траектории можно говорить тогда, когда соответствующая ей длина волны мала по сравнению с размерами системы. В данном случае длина волны должна быть мала по сравнению с размерами той области, в которой происходит заметное взаимодействие. Если размер этой области обозначить через R, то указанное требование можно записать в виде

$$\lambda \ll R, \tag{90,16}$$

где λ — длина волны де Бройля.

Подставляя значение λ в формулу (90,16), мы находим

$$R \gg \frac{2\pi\hbar}{mv}. \tag{90,17}$$

Для того чтобы поведение частицы можно было характеризовать классическими понятиями, надо, чтобы квантовомеханические неопределенности были малы. Иными словами, надо, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{\Delta\theta}{\theta} \ll 1, \qquad \frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1, \tag{90,18}$$

где ρ — классический параметр столкновения, а $\Delta\theta$ и $\Delta\rho$ — соответственно квантовомеханические неопределенности для угла рассеяния θ и параметра столкновения ρ.

Для величины $\Delta\theta$ можно написать выражение, справедливое по порядку величины

$$\Delta\theta \sim \frac{\Delta p}{p}, \tag{90,19}$$

где Δp — неопределенность поперечной составляющей импульса. Используя соотношение неопределенности для координаты и импульса

$$\Delta p \cdot \Delta\rho \sim \hbar$$

и исключая из (90,19) величину Δp, а затем используя (90,18), получаем

$$\theta \gg \Delta\theta \sim \frac{\hbar}{\Delta\rho p} \gg \frac{\hbar}{\rho p}. \tag{90,20}$$

Последнее условие принимает значительно более простой вид, если углы рассеяния малы. В этом случае угол рассеяния θ может быть найден простым способом. Именно он равен отношению величины поперечного импульса, приобретенного рассеянной частицей при прохождении через поле рассеивателя к продольному импульсу. Поперечный импульс равен силе, действующей на частицу $U'(\rho)$, помноженной на эффективное время τ, в течение которого эта сила действует:

$$\tau = \frac{\rho}{v}.$$

Таким образом, угол рассеяния θ по порядку величины равен

$$\theta \approx |U'(\rho)| \frac{\rho}{vp}. \qquad (90{,}21)$$

Или подставляя (90,21) в (90,20), находим условие применимости теории

$$|U'(\rho)|\, \rho^2 \gg \hbar v.$$

Если же производную $U'(\rho)$ заменить через $U(\rho)/\rho$, то условие применимости перепишется в виде

$$|U(\rho)| \gg \frac{\hbar v}{\rho}. \qquad (90{,}22)$$

Сравнивая (90,22) с условием применимости формулы Борна (85,12), мы видим, что условия противоположны друг другу. Таким образом, борновское и квазиклассическое приближения в значительной степени дополняют друг друга.

§ 91. Общая теория неупругого рассеяния и поглощения частиц

До сих пор мы ограничивались рассмотрением процесса упругого рассеяния. Перейдем теперь к более общему случаю, когда возможно и неупругое рассеяние.

Неупругими называются всякие процессы, при которых изменяется внутреннее состояние частиц. Так, например, неупругими будут столкновения, сопровождающиеся возбуждением (например, возбуждением атома или ядра), распадом или образованием новых частиц и т. д. Каждый из возможных процессов именуется соответствующим каналом реакции. Если процесс совместим с законами сохранения, канал называют открытым. В дальнейшем мы будем рассматривать процессы, для которых открыты неупругий и упругий каналы реакции. Мы начнем с некоторого обобщения фазовой теории рассеяния. Это позволит нам охватить одновременно процессы упругого и неупругого рассеяния и поглощения. Для формального описания любого процесса рассеяния окружим мысленно рассеивающий центр сферой достаточно большого радиуса R_0.