рассеянной частицей при прохождении через поле рассеивателя к продольному импульсу. Поперечный импульс равен силе, действующей на частицу $U'(\rho)$, помноженной на эффективное время τ, в течение которого эта сила действует:

$$\tau = \frac{\rho}{v}.$$

Таким образом, угол рассеяния θ по порядку величины равен

$$\theta \approx |U'(\rho)| \frac{\rho}{vp}. \tag{90,21}$$

Или подставляя (90,21) в (90,20), находим условие применимости теории

$$|U'(\rho)| \rho^2 \gg \hbar v.$$

Если же производную $U'(\rho)$ заменить через $U(\rho)/\rho$, то условие применимости перепишется в виде

$$|U(\rho)| \gg \frac{\hbar v}{\rho}. \tag{90,22}$$

Сравнивая (90,22) с условием применимости формулы Борна (85,12), мы видим, что условия противоположны друг другу. Таким образом, борновское и квазиклассическое приближения в значительной степени дополняют друг друга.

§ 91. Общая теория неупругого рассеяния и поглощения частиц

До сих пор мы ограничивались рассмотрением процесса упругого рассеяния. Перейдем теперь к более общему случаю, когда возможно и неупругое рассеяние.

Неупругими называются всякие процессы, при которых изменяется внутреннее состояние частиц. Так, например, неупругими будут столкновения, сопровождающиеся возбуждением (например, возбуждением атома или ядра), распадом или образованием новых частиц и т. д. Каждый из возможных процессов именуется соответствующим каналом реакции. Если процесс совместим с законами сохранения, канал называют открытым. В дальнейшем мы будем рассматривать процессы, для которых открыты неупругий и упругий каналы реакции. Мы начнем с некоторого обобщения фазовой теории рассеяния. Это позволит нам охватить одновременно процессы упругого и неупругого рассеяния и поглощения. Для формального описания любого процесса рассеяния окружим мысленно рассеивающий центр сферой достаточно большого радиуса R_0.

Рассмотрим характер l-й парциальной волны при $r > R_0$ в трех случаях:

1) в начале координат нет рассеивающего центра;

2) в начале координат помещается рассеивающий центр, причем частица испытывает только упругое рассеяние;

3) в начале координат находится рассеивающий центр, на котором частица претерпевает неупругое рассеяние.

В первом случае радиальная функция l-й парциальной волны может быть написана [см. (36,10)] в виде суперпозиции двух волн

$$R_l = a_l \frac{e^{i\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)}}{2ikr} - a_l \frac{e^{-i\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)}}{2ikr} = a_l \frac{\sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)}{kr}.$$

Второе слагаемое представляет сходящуюся волну, первое — расходящуюся. При этом мы пользуемся асимптотическими выражениями, поскольку, по предположению, R_0 достаточно велико. Амплитуды и фазы обеих волн одинаковы и волновая функция R_l является произведением вещественной функции на постоянный множитель. Поэтому поток через замкнутую поверхность равен нулю:

$$j_l = \frac{\hbar}{2mi} \int \left(\psi_l^* \frac{\partial \psi_l}{\partial r} - \psi_l \frac{\partial \psi_l^*}{\partial r}\right) r^2 \, d\Omega = 0,$$

где $\psi_l = P_l(\cos\theta) R_l(r)$.

Во втором случае радиальная функция l-й парциальной волны, согласно (86,2), запишется в виде

$$R_l = B_l \frac{\sin\left(kr + \delta_l - \frac{\pi l}{2}\right)}{kr} = F_l \frac{e^{2i\delta_l} e^{i\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)} - e^{-i\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)}}{2ikr}. \quad (91,1)$$

Амплитуды сходящейся и расходящейся волн отличаются друг от друга фазовым множителем $e^{2i\delta_l}$, причем $\left|e^{2i\delta_l}\right| = 1$. В этом случае полный парциальный поток через поверхность сферы также равен нулю (парциальная волновая функция, зависящая от l, вещественна). Отсюда следует, что расходящийся и сходящийся потоки l-й парциальной волны равны между собой. Тот факт, что сходящаяся и расходящаяся волны имеют разные коэффициенты, $e^{2i\delta_l}$ и единицу, не противоречит этому равенству, так как $\left|e^{2i\delta_l}\right| = 1$.

В третьем случае, когда частицы испытывают неупругое рассеяние, написать общее выражение для радиальной функции с учетом всех возможных неупругих процессов не представляется возможным. Мы можем, однако, упростить задачу, если рассматривать отдельно упругое рассеяние и всевозможные виды неупругого рассеяния.

Для радиальной функции l-й парциальной волны, описывающей упругое рассеяние частицы, в этом случае можно написать следующее формальное выражение:

$$R_l = b_l \frac{S_l e^{i\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)} - e^{-i\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)}}{2ikr}. \tag{91,2}$$

Это выражение построено по тому же принципу, что и (91,1), однако оно учитывает специфику процесса, при котором совместно с упругим рассеянием могут существовать неупругие процессы или поглощение. Введенный коэффициент S_l по модулю меньше единицы. Это выражает тот факт, что при наличии поглощения или неупругого рассеяния сходящийся поток упругорассеянных частиц больше расходящегося. При этом волновая функция запишется в виде

$$\psi = \sum_l b_l \frac{S_l e^{i\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)} - e^{-i\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)}}{2ikr} P_l(\cos\theta) = \sum_l \psi_l.$$

Коэффициенты b_l опять определяются из требования, чтобы волновая функция ψ совпадала с (83,3). Проделывая вычисления, аналогичные тем, которые были приведены при расчете упругого рассеяния, найдем волновую функцию в виде

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l}{2ikr}(2l+1)\left[S_l e^{i\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)} - e^{-i\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)}\right] P_l(\cos\theta). \tag{91,2'}$$

Нетрудно показать, что поток упруго-рассеянных частиц с заданным моментом через сферу радиуса $r \gg R_0$ отличен от нуля. Действительно, имеем

$$\frac{\partial\psi_l}{\partial r} = \frac{i^l(2l+1)P_l(\cos\theta)}{2ikr}\left[ikS_l e^{i\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)} + ike^{-i\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)}\right].$$

При этом в выражении для $\frac{\partial\psi_l}{\partial r}$ удержаны только члены, пропорциональные $1/r$. Члены, пропорциональные $1/r^2$, опущены, поскольку мы хотим найти поток через сферу большого радиуса. Вычислим далее полный поток частиц через сферу радиуса $r \gg R_0$. Он равен

$$j_l = \frac{i\hbar}{2m} r^2 \int \left(\psi_l^* \frac{\partial\psi_l}{\partial r} - \psi_l \frac{\partial\psi_l^*}{\partial r}\right) d\Omega.$$

Подставляя в выражение для потока функцию ψ_l и $\frac{\partial\psi_l}{\partial r}$ и учитывая условия нормировки полиномов Лежандра $P_l(\cos\theta)$, получаем

$$j_l = -\frac{\pi\hbar}{mk}(2l+1)(1-|S_l|^2). \tag{91,3}$$

Так как $|S_l| < 1$, то поток отрицателен. Это означает, что полный поток направлен внутрь сферы.

Легко понять смысл полученного результата: поток падающих на центр частиц с моментом l оказывается бóльшим, чем поток упруго-рассеянных. Частицы испытывают неупругое рассеяние или поглощение, и интенсивность пучка упруго-рассеянных частиц снижается. Ясно, что, разделив поток j_l на плотность потока падающих частиц, мы найдем в соответствии с определением парциальное эффективное сечение неупругого рассеяния. При этом под неупругим рассеянием понимается совокупность всех процессов, снижающих интенсивность упругого рассеяния. Так как плотность потока падающих частиц равна v, то для l-го парциального эффективного сечения неупругого рассеяния получаем

$$\sigma_{l\,\text{неуп}} = \frac{\pi}{k^2}(2l+1)(1-|S_l|^2). \tag{91,4}$$

Что же касается амплитуды упругого рассеяния, то для нее можно, не повторяя выкладок § 86, написать выражение

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(S_l-1)P_l(\cos\theta), \tag{91,5}$$

так как формула (91,1) отличается от (91,2) заменой $e^{2i\delta_l}$ на S_l.

Совокупность комплексных величин S_l определяет эффективное сечение как неупругого, так и упругого рассеяния. В частности, если $S_l = e^{2i\delta_l}$, где δ_l вещественно, то эффективное сечение неупругого рассеяния обращается в нуль, а амплитуда упругого рассеяния совпадает с его выражением (86,11).

Наряду с l-м парциальным эффективным сечением процессов упругого и неупругого рассеяния можно написать и полные эффективные сечения процессов.

Полное эффективное сечение процесса неупругого рассеяния равно, очевидно,

$$\sigma_{\text{неупр}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(1-|S_l|^2) = \sum_l \sigma_l, \tag{91,6}$$

а полное эффективное сечение для упругого процесса равно

$$\sigma_{\text{упр}} = \int |f(\theta)|^2 d\Omega = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)|1-S_l|^2. \tag{91,7}$$

Перейдем теперь к рассмотрению формулы (91,6).

Каждое эффективное сечение σ_l можно наглядно представить себе как характеристику процесса неупругого рассеяния или поглощения частиц с моментом l. Так как величина $|S_l|^2 < 1$, то можно утверждать, что парциальное эффективное сечение σ_l имеет верхний предел $\sigma_{l\,\max} = \frac{\pi}{k^2}(2l+1)$.

Структура формулы (91,6) и физический смысл коэффициента $1 - |S_l|^2$ могут быть легко поняты с помощью следующих рассуждений, основанных на квазиклассическом приближении.

Параметр соударения частицы может быть [см. (86,14)] записан в виде

$$\rho_l = \frac{\hbar}{p}\sqrt{l(l+1)}. \tag{91,8}$$

При больших l для параметра столкновений получаем

$$\rho_l = \frac{\hbar}{p} l.$$

Поверхность кольца, лежащего между двумя окружностями радиуса ρ_l и ρ_{l+1}, равна

$$2\pi\rho_l \frac{\hbar}{p} \approx \frac{\pi\hbar^2}{p^2}(2l+1).$$

Число частиц, которые проходят через это кольцо, ориентированное перпендикулярно к падающему потоку, может быть легко найдено. Если плотность потока падающих частиц равна единице, то число частиц, пересекающих кольцо, равно численно $\frac{\pi\hbar^2}{p^2}(2l+1)$.

Введем так называемый коэффициент прилипания ξ_l, который, по определению, представляет собой отношение числа поглощенных частиц, упавших на заданную поверхность, к полному числу падающих частиц на ту же поверхность. Число частиц, поглощенных поверхностью кольца, ограниченного радиусами ρ_l и ρ_{l+1}, определится выражением

$$\frac{\pi\hbar^2}{p^2}(2l+1)\,\xi_l,$$

и соответственно эффективное сечение поглощения будет иметь вид

$$\sigma_{l\,\text{неупр}} = \frac{\pi}{k^2}(2l+1)\,\xi_l. \tag{91,9}$$

Сравнивая формулу (91,6) и (91,9), видим, что

$$1 - |S_l|^2 = \xi_l, \tag{91,10}$$

т. е. величина $1 - |S_l|^2$ имеет смысл коэффициента прилипания.

Наконец, получим еще формулу, связывающую эффективное сечение упругого и неупругого рассеяния. Оказывается, что имеет место равенство

$$\frac{4\pi}{k}\operatorname{Im} f(0) = \sigma_{\text{неупр}} + \sigma_{\text{упр}}. \qquad (91,11)$$

Для получения этого соотношения вычислим сумму упругого и неупругого эффективных сечений. С помощью соотношений (91,6) и (91,7) имеем

$$\sigma_{\text{неупр}} + \sigma_{\text{упр}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left(2 - S_l - S_l^*\right) =$$

$$= \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(2 - 2\operatorname{Re} S_l). \qquad (91,12)$$

С другой стороны, так как полиномы Лежандра при $\theta = 0$ равны единице, то имеем для амплитуды рассеяния

$$f(0) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(S_l - 1),$$

а мнимая часть амплитуды рассеяния равна

$$\operatorname{Im} f(0) = \frac{1}{2k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(1 - \operatorname{Re} S_l).$$

Сравнивая полученные выражения, мы убеждаемся в справедливости равенства (91,11). Мы показали, таким образом, что сумма эффективных сечений неупругого и упругого рассеяния пропорциональна мнимой части амплитуды рассеяния, взятой при значении угла $\theta = 0$. Формула (91,11) носит название оптической теоремы.

В заключение заметим, что поглощение частиц можно описать, введя комплексный потенциал $U = V_1 - iV_2$, где V_1 и V_2 — действительные функции. Мнимая часть потенциала характеризует поглощение или испускание частиц. Действительно, в этом случае уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_1 - iV_2\right)\psi. \qquad (91,13)$$

Произведя вычисления, аналогичные тем, которые проведены в § 7, мы получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j} - \frac{2V_2\psi^*\psi}{\hbar} = 0, \qquad (91,14)$$

где

$$\rho = \psi^*\psi, \quad \boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi\operatorname{grad}\psi^* - \psi^*\operatorname{grad}\psi\right].$$

В стационарном случае при V_2, равном нулю, $\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0$, что соответствует отсутствию поглощения или испускания частиц. Если $V_2 \neq 0$, то мы получаем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = \frac{2V_2\rho}{\hbar}.$$

В зависимости от знака V_2 последняя формула описывает испускание или поглощение частиц.

§ 92. Дифракционное рассеяние быстрых нейтронов ядрами

Изучение взаимодействия быстрых нейтронов с ядрами показывает, что в области энергий нейтронов, лежащей выше нескольких десятков *Мэв* для легких ядер и нескольких сотен *Мэв* для тяжелых, происходит весьма энергичный захват нейтронов.

Энергичное поглощение нейтронов сопровождается также их упругим рассеянием. При описании сильного поглощения быстрых нейтронов весьма полезной оказалась следующая оптическая аналогия: ядро по отношению к нейтронам ведет себя как идеально поглощающая (черная) сфера, на которую падает световая волна. Поглощение световой волны черной сферой сопровождается ее возмущением в области пространства, расположенной вблизи поглотителя. Это означает, что наряду с поглощением происходит рассеяние света. Аналогично этому поглощение нейтронов ядром будет возмущать их волновую функцию и нейтроны будут испытывать упругое рассеяние.

Для расчета эффективного сечения упругого рассеяния нейтронов воспользуемся аналогией с оптическими явлениями. В § 36 ч. IV мы видели, что при длине световой волны, меньшей радиуса рассеивающей сферы, позникают дифракционные явления. При этом интенсивность света, рассеянного черным шариком радиуса R в телесный угол $d\Omega$, дается выражением (36,13) ч. IV

$$dI = \frac{I}{\pi} \left| \frac{J_1(kR\theta)}{\theta} \right|^2 d\Omega, \tag{92,1}$$

где θ — угол рассеяния света, I — полная интенсивность падающего на экран света, J_1 — функция Бесселя первого порядка.

Простая оценка показывает, что длина волны нейтронов с энергией порядка 1 *Мэв* в несколько сотен раз меньше размеров ядра. Поэтому к рассеянию нейтронов поглощающим ядром можно применить оптическую формулу (92,1). Для того чтобы получить дифференциальное эффективное сечение рассеяния