Из соотношений (92,5) и (92,6) следует, что полное взаимодействие нейтронов с ядром равно удвоенному геометрическому сечению ядра

$$\sigma_{\text{неупр}} + \sigma_{\text{упр}} = 2\pi R^2. \tag{92,7}$$

С помощью аналогичных приемов можно также вычислить эффективные сечения рассеяния ядрами, лишь частично поглощающими падающие на них нейтроны, а также дифракционное рассеяние заряженных частиц на ядрах [1]).

§ 93. Рассеяние медленных частиц. Пороговое приближение

Применим полученные формулы фазовой теории рассеяния к нахождению эффективных сечений упругого и неупругого рассеяния медленных частиц. Под медленными, как и в § 86, мы будем понимать частицы, длина волны которых λ велика по сравнению с размерами области взаимодействия. Мы ограничимся случаем, когда энергия взаимодействия убывает с расстоянием достаточно быстро, так что можно ввести эффективный размер области взаимодействия a.

Как мы уже видели в § 86, при малых энергиях существенно лишь S-рассеяние. Радиальная часть волновой функции, соответствующая моменту $l = 0$, удовлетворяет уравнению (35,8)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R_0}{\partial r}\right) + U(r)R_0 = ER_0.$$

Вводя волновое число $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, можно переписать последнее уравнение в виде

$$R_0'' + \frac{2}{r}R_0' + k^2R_0 - \frac{2m}{\hbar^2}U(r)R_0 = 0. \tag{93,1}$$

При $r > a$, вне области взаимодействия, потенциальная энергия равна нулю и уравнение для функции R_0 приобретает вид

$$R_0'' + \frac{2}{r}R_0' + k^2R_0 = 0. \tag{93,2}$$

Ясно, что потенциальная энергия обращается в нуль не резко, на некоторой границе, а в переходной области, где потенциальная энергия изменяется по некоторому сложному и обычно не известному закону.

Поэтому на первый взгляд нахождение функции во всем пространстве представляется задачей нереальной степени сложности. В действительности, однако, это не так.

---

[1]) Подробнее см. А. И. Ахиезер и И. Я. Померанчук, Некоторые вопросы теории ядра, Гостехиздат, 1950.

Оказывается, что можно воспользоваться большим значением λ или, что то же самое, малым k для существенного упрощения задачи. Именно, в области $r < a$, т. е. в области эффективного взаимодействия, можно пренебречь слагаемым k^2 как малым по сравнению с $\frac{2m}{\hbar^2} U(r)$. Тогда имеем

$$R_0'' + \frac{2}{r} R_0' - \frac{2m}{\hbar^2} U(r) R_0 = 0. \tag{93,3}$$

Решение уравнения (93,3) при заданной функции $U(r)$ можно написать в виде $R_0(r, c_1, c_2)$, где c_1 и c_2 — две произвольные постоянные. Поскольку в (93,3) не входит величина k, в области $r < a$ волновую функцию будем предполагать не зависящей от k.

Решением уравнения (93,2) служит

$$R_0 = \frac{1}{2ikr}(c_3 e^{ikr} + c_4 e^{-ikr}). \tag{93,4}$$

Здесь c_3 и c_4 — две постоянные интегрирования, не зависящие от r, но являющиеся, вообще говоря, функциями k.

В переходной области написать уравнение для волновой функции нельзя, поскольку здесь не известен ход потенциальной энергии. Однако ширина промежуточной области мала по сравнению с размером области взаимодействия и весьма мала по сравнению с длиной волны λ.

Между тем существенное изменение волновой функции происходит на длине волны. Поэтому можно пренебречь изменением волновой функции в переходной области и заменить эту область резкой границей при $r = a$. На этой поверхности оба решения должны плавно смыкаться.

Ясно, однако, что сомкнуть две функции, одна из которых зависит от k как от параметра, а другая вовсе от k не зависит, можно тогда, когда в окрестности границы области функция (93,4) также становится не зависящей от k.

При $r \sim a$ величина ka мала по условию. Поэтому, разлагая экспоненты (93,4) в ряд по степеням kr и ограничиваясь двумя первыми членами разложения, получаем

$$R_0 = \frac{c_3(k)(1 + ikr) + c_4(k)(1 - ikr)}{2ikr}. \tag{93,5}$$

Это выражение не будет зависеть от k в том случае, когда выполняются соотношения

$$\left.\begin{aligned} c_4(k) + c_3(k) &= 2ika_2, \\ c_3(k) - c_4(k) &= 2a_1, \end{aligned}\right\} \tag{93,6}$$

где a_1 и a_2 — постоянные, не зависящие от k, величины.

Решая систему уравнений (97,6), находим для c_3 и c_4:

$$\left.\begin{aligned} c_4 &= -a_1 + ika_2, \\ c_3 &= ika_2 + a_1. \end{aligned}\right\} \tag{93,7}$$

Сравнивая выражение (93,4) с (91,2), находим величину S_0. Она имеет вид

$$S_0 = -\frac{c_3}{c_4} = -\frac{a_1 + ika_2}{ika_2 - a_1}. \tag{93,8}$$

Разлагая в ряд по малым значениям k, получаем

$$S_0 = 1 + 2ik\frac{a_2}{a_1}.$$

Используя формулы (91,6) и (91,7), находим выражение для эффективных сечений упругого и неупругого процессов:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\text{упр}} &= \frac{\pi}{k^2}|1 - S_0|^2 = 4\pi\left|\frac{a_2}{a_1}\right|^2, \\ \sigma_{\text{неупр}} &= \frac{\pi}{k^2}(1 - |S_0|^2) = \frac{4\pi}{k}\operatorname{Im}\frac{a_2}{a_1}. \end{aligned}\right\} \tag{93,9}$$

Из полученных формул следует, что эффективное сечение упругого рассеяния в рассмотренном случае не зависит от энергии рассеиваемой частицы. Эффективное сечение неупругого рассеяния обратно пропорционально волновому числу k, т. е. обратно пропорционально скорости частицы v.

Примененный нами прием пренебрежения шириной переходной зоны и замена уравнения (93,1) на уравнение (93,3) во внутренней области имеет весьма общий характер и носит название порогового приближения. Пороговое приближение с успехом применяется во всех случаях, когда длину волны можно считать большой по сравнению с шириной переходной области.

В дальнейшем мы встретимся еще с использованием порогового приближения.

§ 94. Формула Брейта — Вигнера

В предыдущих параграфах мы рассмотрели законы упругого рассеяния частиц, а также поглощения частиц. Теперь мы перейдем к изучению некоторых явлений, происходящих при ядерных реакциях типа

$$A + a \to B + b. \tag{94,1}$$

Здесь A и B — начальное и конечное ядра, a — падающая частица и b — частица, вылетающая в результате реакции. Чтобы не учитывать усложнений, связанных с влиянием электрического