Решая систему уравнений (97,6), находим для c_3 и c_4:

$$\left.\begin{aligned} c_4 &= -a_1 + ika_2, \\ c_3 &= ika_2 + a_1. \end{aligned}\right\} \tag{93,7}$$

Сравнивая выражение (93,4) с (91,2), находим величину S_0. Она имеет вид

$$S_0 = -\frac{c_3}{c_4} = -\frac{a_1 + ika_2}{ika_2 - a_1}. \tag{93,8}$$

Разлагая в ряд по малым значениям k, получаем

$$S_0 = 1 + 2ik\frac{a_2}{a_1}.$$

Используя формулы (91,6) и (91,7), находим выражение для эффективных сечений упругого и неупругого процессов:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\text{упр}} &= \frac{\pi}{k^2}|1 - S_0|^2 = 4\pi\left|\frac{a_2}{a_1}\right|^2, \\ \sigma_{\text{неупр}} &= \frac{\pi}{k^2}(1 - |S_0|^2) = \frac{4\pi}{k}\operatorname{Im}\frac{a_2}{a_1}. \end{aligned}\right\} \tag{93,9}$$

Из полученных формул следует, что эффективное сечение упругого рассеяния в рассмотренном случае не зависит от энергии рассеиваемой частицы. Эффективное сечение неупругого рассеяния обратно пропорционально волновому числу k, т. е. обратно пропорционально скорости частицы v.

Примененный нами прием пренебрежения шириной переходной зоны и замена уравнения (93,1) на уравнение (93,3) во внутренней области имеет весьма общий характер и носит название порогового приближения. Пороговое приближение с успехом применяется во всех случаях, когда длину волны можно считать большой по сравнению с шириной переходной области.

В дальнейшем мы встретимся еще с использованием порогового приближения.

§ 94. Формула Брейта — Вигнера

В предыдущих параграфах мы рассмотрели законы упругого рассеяния частиц, а также поглощения частиц. Теперь мы перейдем к изучению некоторых явлений, происходящих при ядерных реакциях типа

$$A + a \to B + b. \tag{94,1}$$

Здесь A и B — начальное и конечное ядра, a — падающая частица и b — частица, вылетающая в результате реакции. Чтобы не учитывать усложнений, связанных с влиянием электрического поля ядра, мы ограничимся случаем, когда падающая и вылетающая частицы являются нейтронами.

Изучение реакций, вызванных нейтронами со сравнительно небольшими энергиями, показало, что эффективное сечение реакции в зависимости от энергии падающих нейтронов обнаруживает максимумы при определенных значениях энергии. Явление имеет ярко выраженный резонансный характер — максимумы отвечают весьма узким интервалам энергии нейтронов.

Для объяснения резонансного характера ядерных реакций Н. Бором была предложена следующая общая схема протекания ядерных реакций: нейтрон a, проникающий в ядро, сильно взаимодействует с ядерными частицами и передает им свою избыточную энергию. Последняя равна, очевидно, сумме его кинетической энергии и энергии связи частицы в ядре U_0. Привнесенная нейтроном энергия быстро распределяется между всеми ядерными нуклонами, поскольку они сильно взаимодействуют между собой. В результате из ядра A и нейтрона возникает новое, так называемое промежуточное ядро C. Промежуточное ядро не является стабильной системой, поскольку его энергия выше энергии нормального состояния на величину $E + U_0$. По прошествии некоторого времени жизни промежуточное ядро будет переходить в невозбужденное состояние. Этот переход может происходить при малых энергиях возбуждений двумя путями:

во-первых, в результате флуктуации на одной из ядерных частиц может сконцентрироваться вся энергия возбуждения. Эта частица (для простоты рассуждений — нейтрон) получает возможность вылететь из ядра, обладая при этом энергией E. Очевидно, что этот путь реакции отвечает упругому рассеянию нейтрона ядром;

во-вторых, энергия возбуждения может уноситься вылетающим нейтроном не полностью, а лишь частично. Остаток энергии возбуждения излучается системой ядерных частиц в виде γ-кванта. В этом случае имеет место неупругое рассеяние нейтрона. Частным случаем последней реакции служит реакция радиационного захвата нейтрона, при которой вся энергия возбуждения уносится γ-квантом и нейтрон остается в ядре.

Для эффективных сечений упругого и неупругого рассеяния можно воспользоваться формулами (91,6) и (91,7). Мы ограничимся при этом случаем медленных нейтронов, описываемых S-волной. Ядро будем считать сферой радиуса R. Хотя ядро нельзя считать имеющим резкую геометрическую границу, его размытость весьма мала по сравнению с длиной волны падающего нейтрона $\lambda \gg R$.

Нейтрон внутри ядра должен находиться в состоянии, которому отвечает длина волны $\lambda_{\text{вн}}$. На поверхности $r = R$ должно иметь место смыкание волновых функций, описывающих нейтрон вне и внутри ядра. Для этого должны выполняться условия

$$\psi=\psi_{\text{вн}}, \qquad \frac{d\psi}{dr}=\frac{d\psi_{\text{вн}}}{dr}.$$

Из второго условия следует, что по порядку величины амплитуды волновых функций внешнего и внутреннего движения относятся как $\sim\frac{\lambda_{\text{вн}}}{\lambda}$. Это означает, что вероятность попадания частицы внутрь ядра $\sim\left(\frac{\lambda_{\text{вн}}}{\lambda}\right)^2$, т. е. весьма мала.

Лишь при особо малых значениях внутренней производной $\frac{d\psi_{\text{вн}}}{dr}\sim 0$, внутренняя амплитуда может оказаться порядка внешней. Это значит, что при определенных условиях, в частности при определенной энергии нейтрона, вероятность его проникновения внутрь ядра оказывается достаточно большой.

Соответствующая энергия определяется значением нормальной производной волновой функции на поверхности ядра.

Обозначим через $f(E)$ величину

$$f(E)=R\left(\frac{\frac{d}{dr}(r\psi)}{r\psi}\right)_{r=R}. \tag{94,2}$$

Величина $f(E)$ непосредственно связана с нормальной производной $\left(\frac{d\psi}{dr}\right)_{r=R}$ и зависит от энергии нейтрона E. Легко выразить через f величину S_0, определяющую эффективное сечение упругого и неупругого рассеяния s-волны.

Подставляя в (94,2) значение ψ из (91,2), находим

$$f=-i\,\frac{kRe^{-ikR}+kRS_0e^{ikR}}{e^{-ikR}-S_0e^{ikR}}.$$

Отсюда следует, что

$$S_0=-e^{-2ikR}\,\frac{kR-if(E)}{kR+if(E)}. \tag{94,3}$$

Поскольку $f(E)$ является, вообще говоря, комплексной величиной, можно написать:

$$f(E)=f_1(E)-if_2(E), \tag{94,4}$$

где $f_1(E)$ и $f_2(E)$ — вещественные функции. Поскольку всегда $|S_0|\leqslant 1$, функция $f_2(E)\geqslant 0$.

С учетом (98,4), для S_0 имеем

$$S_0=-e^{-2ikR}\,\frac{kR-if_1(E)-f_2(E)}{kR+if_1(E)+f_2(E)}. \tag{94,5}$$

Подставляя это значение S_0 в (91,6), находим

$$\sigma_{\text{неупр}} = \frac{\pi}{k^2}(1 - |S_0|^2) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{kRf_2}{(kR+f_2)^2 + f_1^2}. \tag{94,6}$$

Аналогично из (91,7) следует

$$\sigma_{\text{упр}} = \frac{\pi}{k^2}|1 - S_0|^2 = \frac{\pi}{k^2}\left|1 + e^{-2ikR}\frac{kR - if_1 - f_2}{kR + if_1 + f_2}\right|^2 =$$
$$= \frac{4\pi}{k^2}\left|e^{-ikR}\frac{kR\cos kR - f_1\sin kR + if_2\sin kR}{kR + if_1 + f_2}\right|^2 =$$
$$= \frac{4\pi}{k^2}\left|\frac{kR}{i(kR+f_2) - f_1} + e^{ikR}\sin kR\right|^2. \tag{94,7}$$

Обсудим прежде формулу для $\sigma_{\text{неупр}}$. Поскольку $f_2 > 0$, эффективное сечение имеет максимум при $f_1(E_0) = 0$. При энергии нейтрона, равной E_0, он с относительно большой вероятностью проникает внутрь ядра. Соответственно этому энергия E_0 отвечает резонансному значению энергии ядра. Вблизи резонансной энергии функцию $f_1(E)$ можно разложить в ряд по степеням $(E - E_0)$ и ограничиться первым членом разложения

$$f_1(E) = f'(E_0)(E - E_0).$$

Можно показать[1]), что величина $f'(E_0) < 0$. Введем обозначения:

$$\Gamma_e = -\frac{2kR}{f'(E_0)}; \quad \Gamma_r = -\frac{2f_2}{f'(E_0)}; \quad \Gamma = \Gamma_e + \Gamma_r. \tag{94,8}$$

Тогда находим

$$\sigma_{\text{неупр}} \approx \frac{\pi}{k^2}\frac{\Gamma_e\Gamma_r}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \tag{94,9}$$

В формуле (94,7) для $\sigma_{\text{упр}}$ при $E \approx E_0$ обычно первое слагаемое велико по сравнению со вторым и можно написать

$$(\sigma_e)_{\text{упр}} \approx \frac{\pi}{k^2}\frac{\Gamma_e^2}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \tag{94,10}$$

Формулы для сечений упругого и неупругого рассеяния медленных нейтронов носят названия формул Брейта — Вигнера. Для выяснения физического смысла введенных величин Γ_e, Γ_r и Γ полезно сравнить формулы Брейта — Вигнера с дисперсионными формулами теории рассеяния света (§ 109). Мы видим, что общая структура формул совпадает. Это вполне естественно, так как формулы Брейта — Вигнера можно было бы получить,

[1]) См. А. И. Ахиезер и И. Я. Померанчук, Некоторые вопросы теории ядра, Гостехиздат, 1950, стр. 239.

рассматривая реакцию как переход системы (ядро + нейтрон) из начального в конечное состояние через некоторое промежуточное состояние — промежуточное ядро (т. е. по той же схеме, что и при рассеянии фотонов). Непосредственное применение теории возмущений приводит к формулам Брейта — Вигнера. Однако такой способ получения формул Брейта — Вигнера нельзя считать обоснованным, поскольку возмущение состояния нейтрона нельзя считать слабым.

Тем не менее такое наглядное, но нестрогое вычисление показывает, что величины Γ_e и Γ_r характеризуют вероятности переходов. Именно, Γ_e пропорциональна матричному элементу перехода системы из промежуточного состояния (ядро C) в конечное (ядро A и нейтрон с энергией E). Поэтому величина Γ_e, которую называют частичной шириной резонансного уровня E, отвечающей упругому рассеянию, определяет вероятность распада ядра C с упругим рассеянием нейтрона. Γ_r называется частичной шириной резонансного уровня по отношению к реакции. Она определяет вероятность распада ядра с неупругим рассеянием и захватом нейтрона. В случае медленных нейтронов вероятность неупругого рассеяния мала и реакция сводится к захвату нейтрона. Наконец, Γ определяет полную вероятность распада ядра C. Она равна энергетической полуширине резонансного максимума сечения.

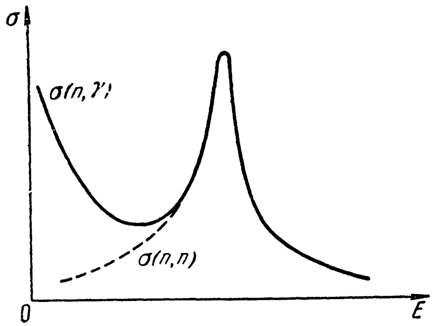

Рис. 26.

На рис. 26 приведена зависимость эффективных сечений процессов упругого рассеяния $\sigma(n, n)$ и радиационного захвата медленных нейтронов $\sigma(n, \gamma)$. Формулы Брейта — Вигнера были выведены нами в частном случае, когда энергия нейтрона близка к одному из резонансных уровней ядра E_0. Они могут быть обобщены на случай многих уровней. В них могут быть учтены также спиновые состояния ядра и легких частиц. Наконец, формулы Брейта — Вигнера могут быть обобщены на случай заряженных частиц и частиц с моментом. Обсудим некоторые свойства ширин резонансного уровня ядра. Ширина реакции Γ_r для медленных нейтронов сводится к ширине радиационного захвата Γ_γ, поскольку неупругое рассеяние при малых энергиях не происходит. Величина Γ_γ составляет около 10^{-1} *эв* и не зависит от скорости нейтрона. Ширина $\Gamma_e \sim k \sim v$, где v — скорость нейтрона и при малых энергиях у тяжелых и средних ядер $\Gamma_e \ll \Gamma_r$. Это означает, что захват нейтронов преобладает над упругим рассеянием. У легких ядер наблюдается обратная картина — резонансное рассеяние преобладает над захватом.

Представления Бора об образовании промежуточного ядра справедливы для ядерных реакций, происходящих при не слишком больших энергиях. С ростом энергии падающих частиц их сечение рассеяния на отдельных ядерных нуклонах резко уменьшается. Поэтому при энергиях $E > 50$—100 *Мэв* взаимодействие частиц с ядром сводится к взаимодействию с отдельным ядерным нуклоном. Формулы Брейта — Вигнера оказываются более неприменимыми.

§ 95. Матрица рассеяния (S-матрица)

Изложенный выше расчетный аппарат теории рассеяния связан с заданием явного вида распределения потенциала взаимодействия во всем пространстве. Между тем в ряде важных случаев потенциальная энергия (не зависящая от скорости) не существует. Поэтому в современной теории рассеяния важную роль играет более общая постановка задачи. Именно, пусть задана волновая функция системы частиц $\psi_a(t \to -\infty)$ в начальном состоянии до взаимодействия. Общая задача теории рассеяния заключается в нахождении волновой функции системы по прошествии большого времени после взаимодействия $\psi(t \to \infty)$. Волновая функция $\psi(t \to \infty)$ может быть выражена через начальную функцию $\psi_a(t \to -\infty)$ с помощью оператора $\hat{V}(t, t_0)$, введенного в § 49 и описывающего эволюцию волновой функции во времени. Назовем матрицей рассеяния S предельное выражение оператора $\hat{V}(t, t_0)$, описывающего развитие процесса во времени (см. § 49)

$$\hat{S} = \lim_{\substack{t_0 \to -\infty \\ t \to \infty}} \hat{V}(t, t_0). \tag{95,1}$$

Таким образом, матрица рассеяния S осуществляет преобразование начального состояния $\psi_a(-\infty)$ в конечное состояние $\psi(\infty)$:

$$\psi(\infty) = \hat{S}\psi_a(-\infty). \tag{95,2}$$

Индексом a мы обозначили совокупность квантовых чисел (полный набор), определяющих состояние системы до рассеяния. Предполагается, что как в начальном, так и в конечном состоянии частицы разведены на достаточно большие расстояния друг от друга, так что можно не учитывать взаимодействия между ними (так называемая адиабатическая гипотеза).

Разложим функцию ψ в ряд по некоторой полной системе функций ψ_b, где через b мы обозначим соответствующий набор