нейтронов преобладает над упругим рассеянием. У легких ядер наблюдается обратная картина — резонансное рассеяние преобладает над захватом.

Представления Бора об образовании промежуточного ядра справедливы для ядерных реакций, происходящих при не слишком больших энергиях. С ростом энергии падающих частиц их сечение рассеяния на отдельных ядерных нуклонах резко уменьшается. Поэтому при энергиях $E > 50—100$ *Мэв* взаимодействие частиц с ядром сводится к взаимодействию с отдельным ядерным нуклоном. Формулы Брейта — Вигнера оказываются более неприменимыми.

§ 95. Матрица рассеяния (S-матрица)

Изложенный выше расчетный аппарат теории рассеяния связан с заданием явного вида распределения потенциала взаимодействия во всем пространстве. Между тем в ряде важных случаев потенциальная энергия (не зависящая от скорости) не существует. Поэтому в современной теории рассеяния важную роль играет более общая постановка задачи. Именно, пусть задана волновая функция системы частиц $\psi_a(t \to -\infty)$ в начальном состоянии до взаимодействия. Общая задача теории рассеяния заключается в нахождении волновой функции системы по прошествии большого времени после взаимодействия $\psi(t \to \infty)$. Волновая функция $\psi(t \to \infty)$ может быть выражена через начальную функцию $\psi_a(t \to -\infty)$ с помощью оператора $\hat{V}(t, t_0)$, введенного в § 49 и описывающего эволюцию волновой функции во времени. Назовем матрицей рассеяния S предельное выражение оператора $\hat{V}(t, t_0)$, описывающего развитие процесса во времени (см. § 49)

$$\hat{S} = \lim_{\substack{t_0 \to -\infty \\ t \to \infty}} \hat{V}(t, t_0). \tag{95,1}$$

Таким образом, матрица рассеяния S осуществляет преобразование начального состояния $\psi_a(-\infty)$ в конечное состояние $\psi(\infty)$:

$$\psi(\infty) = \hat{S}\psi_a(-\infty). \tag{95,2}$$

Индексом a мы обозначили совокупность квантовых чисел (полный набор), определяющих состояние системы до рассеяния. Предполагается, что как в начальном, так и в конечном состоянии частицы разведены на достаточно большие расстояния друг от друга, так что можно не учитывать взаимодействия между ними (так называемая адиабатическая гипотеза).

Разложим функцию ψ в ряд по некоторой полной системе функций ψ_b, где через b мы обозначим соответствующий набор квантовых чисел

$$\psi = \sum_b c_b \psi_b.$$

Знак $\sum\limits_b$ означает суммирование по квантовым числам, пробегающим дискретный ряд значений и интегрирование по квантовым числам, изменяющимся непрерывным образом.

Коэффициенты разложения c_b выражаются, как это следует из (95,2), через матричные элементы оператора $\hat{S}$:

$$c_b = (\psi_b,\ \psi) = (\psi_b,\ \hat{S}\psi_a) = \langle b | S | a \rangle = S_{ba}. \tag{95,3}$$

Квадрат модуля амплитуды c_b дает полную вероятность перехода системы при рассеянии из состояния a в состояние b

$$W'_{ba} = | S_{ba} |^2. \tag{95,4}$$

Таким образом, матричные элементы оператора $\hat{S}$ непосредственно связаны с соответствующими вероятностями перехода.

Поскольку оператор $\hat{V}(t, t_0)$ унитарен (см. § 49), унитарно и его предельное значение, т. е. для оператора $\hat{S}$ можно написать

$$\hat{S}\hat{S}^+ = \hat{S}^+\hat{S} = \hat{I}, \tag{95,5}$$

где через $\hat{I}$ обозначен единичный оператор.

Беря диагональные матричные элементы одного из соотношений (95,5), получаем очевидный результат

$$\sum_b S^+_{ab} S_{ba} = \sum_b | S_{ba} |^2 = 1, \tag{95,6}$$

т. е. сумма вероятностей всех возможных переходов равна единице. Основываясь на соотношении (95,4), можно выразить эффективное сечение процесса через матричные элементы оператора $\hat{S}$. Однако предварительно необходимо получить выражение для вероятности перехода в единицу времени.

Предположим, что начальное состояние ψ_a характеризуется определенным значением энергии E_a. Полная энергия системы сохраняется во времени. Поэтому матрицу S_{ba} можно представить в виде

$$S_{ba} = S^E_{ba}\, \delta(E_a - E_b).$$

О матрице S^E_{ba} говорят, что она задана на энергетической поверхности. Тогда полная вероятность перехода (95,4) запишется в виде

$$W'_{ba} = | S^E_{ba} |^2\, \delta^2 (E_a - E_b). \tag{95,7}$$

Эта вероятность пропорциональна квадрату δ функции. Одну из δ функций представим в виде (см. приложение III, т. I)

$$\delta(E_a - E_b) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi\hbar} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp \frac{i}{\hbar}(E_a - E_b)\, t\, dt.$$

Подставляя это выражение в (95,7) и интегрируя вероятность перехода по энергии конечного состояния, получим вероятность перехода за время T:

$$\overline{W}_{ba} = \int W'_{ba}\, dE_b = \frac{1}{2\pi\hbar} \left| S^E_{ab} \right|^2 T. \qquad (95,8)$$

Отсюда находим для вероятности перехода в единицу времени

$$W = \frac{1}{2\pi\hbar} \left| S^E_{ba} \right|^2. \qquad (95,9)$$

Для нахождения сечения процесса мы должны разделить вероятность перехода на плотность потока падающих частиц.

В начальном состоянии имеются две частицы. Процесс рассеяния рассматриваем, как обычно, в системе центра тяжести. Волновая функция начального состояния ψ_a описывает состояния с заданной энергией относительного движения E_a и направлением импульса относительного движения $\boldsymbol{n}_a = \frac{\boldsymbol{p}_a}{p_a}$ и нормирована условием

$$\int \psi^*_{E_a n} \psi_{E'_a n'}\, dV = \delta(E_a - E'_a)\, \delta(\boldsymbol{n}_a - \boldsymbol{n}'_a) = p_a^2 \frac{dp}{dE}\, \delta(\boldsymbol{p}_a - \boldsymbol{p}'_a). \qquad (95,10)$$

Тогда

$$\psi_{E_a n} = |E_a, \boldsymbol{n}\rangle = p_a \sqrt{\frac{dp}{dE}}\, \psi_{\boldsymbol{p}_a} = \frac{p_a}{\sqrt{v_a}} |\boldsymbol{p}_a\rangle. \qquad (95,11)$$

При этом плотность потока падающих частиц равна

$$\boldsymbol{j}_0 = \frac{p_a^2}{(2\pi\hbar)^3} \boldsymbol{n}_a. \qquad (95,12)$$

Как всегда, когда мы имеем дело с непрерывно изменяющейся величиной, мы должны ввести дифференциальную вероятность перехода dW_{ba} и, следовательно, дифференциальное эффективное сечение $d\sigma_{ba}$. Обозначая через $d\Omega_b$ интервал телесного угла, в котором лежит вектор $\boldsymbol{n}_b$, получаем из (95,9) и (95,12)

$$d\sigma_{ba} = \frac{4\pi^2}{k_a^2} \left| \langle b, E, \boldsymbol{n}_b | S^E | a, E, \boldsymbol{n}_a \rangle \right|^2 d\Omega_b, \qquad (95,13)$$

где $k_a = \frac{1}{\hbar} p_a$.

Рассмотрим теперь случай, когда в результате взаимодействия двух частиц может происходить упругое и различные виды неупругого рассеяния, т. е.

$$A+B\to\begin{cases}A+B\\C+D\\C'+D'\end{cases}$$

Каждый вид превращения мы будем называть каналом реакции. Формула (95,13) при $b\neq a$ отвечает неупругому каналу реакции. Сечение с учетом упругого и неупругого каналов можно представить в виде

$$d\sigma_{ba}=\frac{4\pi^2}{k_a^2}\,|\langle b,\ E,\ \boldsymbol{n}_b|S^E-I|a,\ E,\ \boldsymbol{n}_a\rangle|^2\,d\Omega_b, \tag{95,14}$$

где I — единичная матрица. Поскольку у матрицы I отличны от нуля только диагональные элементы, при $b\neq a$ сечение (95,14) совпадает с (95,13).

Выражения (95,13) и (95,14) можно представить в виде, аналогичном (86,12), если разложить начальное состояние $|a, E, \boldsymbol{n}_a\rangle$ по парциальным волнам

$$|a,\ E,\ \boldsymbol{n}_a\rangle=|a,\ E,\ l,\ m\rangle\langle l,\ m|\boldsymbol{n}_a\rangle. \tag{95,15}$$

Функции преобразования $\langle l, m|\boldsymbol{n}_a\rangle$ были найдены в § 48:

$$\langle l,\ m|\boldsymbol{n}_a\rangle=Y^*_{lm}(\boldsymbol{n}_a). \tag{95,16}$$

Выбирая ось z вдоль направления вектора $\boldsymbol{n}_a$, получаем

$$Y_{lm}(\boldsymbol{n}_a)=Y_{lm}(0)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,\delta_{m0}. \tag{95,17}$$

При подстановке выражений (95,16), (95,17) в (95,13) и (95,14) возникнут матричные элементы вида

$$\langle b,\ E,\ \boldsymbol{n}_b|S^E|a,\ E,\ l,\ 0\rangle.$$

При движении в центральном поле момент количества движения сохраняется. Поэтому S-матрица диагональна по квантовым числам l, m и можно написать

$$\begin{aligned}\langle b,\ E,\ \boldsymbol{n}_b|S^E|a,\ E,\ l,\ 0\rangle&=\langle \boldsymbol{n}_b|l,\ 0\rangle\langle b,\ E,\ l,\ 0|S^E|a,\ E,\ l,\ 0\rangle=\\&=Y_{l0}(\boldsymbol{n}_b)\langle b,\ E,\ l,\ 0|S^E|a,\ E,\ l,\ 0\rangle=\\&=P_l(\cos\theta_b)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,S^l_{ba}.\end{aligned} \tag{95,18}$$

Соответственно для дифференциального сечения рассеяния в телесный угол $d\Omega_b$ получаем

$$d\sigma_{ba}=\frac{1}{4k_a^2}\left|\sum_l (2l+1)\left(S_{ba}^l-\delta_{ba}\right)P_l(\cos\theta)\right|^2 d\Omega_b. \qquad (95,19)$$

Интегрируя это выражение по всем направлениям вектора $\boldsymbol{n}_b$, получим эффективное сечение рассеяния $a\to b$

$$\sigma_{ba}=\frac{\pi}{k_a^2}\sum_l (2l+1)\left|S_{ba}^l-\delta_{ba}\right|^2. \qquad (95,20)$$

Из последней формулы следует, что полное сечение упругого рассеяния имеет вид

$$\sigma_{aa}=\frac{\pi}{k_a^2}\sum_l (2l+1)\left|S_{aa}^l-1\right|^2. \qquad (95,21)$$

Напишем выражение также для полного сечения всех неупругих процессов $\sigma_{\text{неупр}}$, которое получается суммированием σ_{ba} по всем каналам $b\neq a$

$$\sigma_{\text{неупр}}=\sum_{b\neq a}\sigma_{ba}=\frac{\pi}{k_a^2}\sum_{b\neq a}\sum_l (2l+1)\left|S_{ba}^l\right|^2.$$

Это выражение можно преобразовать, воспользовавшись унитарностью S-матрицы. Именно, имеем, очевидно,

$$\sum_{b\neq a}\left|S_{ba}^l\right|^2=1-\left|S_{aa}^l\right|^2. \qquad (95,22)$$

Соответственно для $\sigma_{\text{неупр}}$ получаем

$$\sigma_{\text{неупр}}=\frac{\pi}{k_a^2}\sum_l (2l+1)\left(1-\left|S_{aa}^l\right|^2\right). \qquad (95,23)$$

Формулы (95,23) и (95,21) совпадают с формулами (91,6) и (91,7) фазовой теории рассеяния. Мы видим, что введенные в § 91 величины S^l являются диагональными матричными элементами матрицы рассеяния S. Если неупругие процессы невозможны, т. е. $S_{ba}^l=0$ при $b\neq a$, то из соотношения унитарности (95,22) следует, что $\left|S_{aa}^l\right|^2=1$, т. е.

$$S_{aa}^l=e^{2i\delta_l}. \qquad (95,24)$$

При этом выражения (95,19)—(95,21) совпадают с выражениями для сечения упругого рассеяния, полученного в § 86.

Из соотношений (95,19), (95,21) и (95,22) следует, что эффективное сечение процесса определяется матричными элементами оператора $\hat{F}$, $i\hat{F}=\hat{S}-\hat{I}$ (множитель i введен для удобства). Унитарность S-матрицы приводит к следующему соотношению:

$$\hat{S}^+\hat{S} = (\hat{I} - i\hat{F}^+)(\hat{I} + i\hat{F}) = \hat{I}$$

или

$$-i\hat{F} + i\hat{F}^+ = \hat{F}^+\hat{F}.$$

Беря матричные элементы от левой и правой частей этого соотношения по волновым функциям (95,11), получим

$$\hat{F}_{ba} - \hat{F}^+_{ba} = i\sum_c \hat{F}^+_{bc}\hat{F}_{cb}; \tag{95,25}$$

$\sum_c$ означает суммирование по дискретным и интегрирование по непрерывным состояниям системы двух частиц после столкновения. Фактически система (95,25) является системой интегральных уравнений, выражающих свойство унитарности S-матрицы.

Система уравнений (95,25) существенно упрощается, если возможно только упругое рассеяние. В этом случае матричные элементы оператора $\hat{F}$, как это видно из сравнения (95,19), (86,11) и (86,12), совпадают с точностью до множителя с амплитудой упругого рассеяния $f(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{n})$:

$$\frac{2\pi}{k}\hat{F}_{\boldsymbol{n}',\,\boldsymbol{n}} = f(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{n}), \tag{95,26}$$

где $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n}'$ — единичные векторы, характеризующие направление вектора импульса относительного движения падающих и рассеянных частиц. Из (95,25) получаем

$$f(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{n}) - f^*(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}') = \frac{ik}{2\pi}\int f^*(\boldsymbol{n}'', \boldsymbol{n}')\, f(\boldsymbol{n}'', \boldsymbol{n})\, d\Omega''. \tag{95,27}$$

Соотношение (95,27) выражает условие унитарности для упругого рассеяния. При рассеянии в центральном поле амплитуда f зависит только от угла ϑ между векторами $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n}'$ и соотношение (95,27) может быть переписано в виде

$$\operatorname{Im} f(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{n}) = \frac{k}{2\pi}\int f^*(\boldsymbol{n}'', \boldsymbol{n}')\, f(\boldsymbol{n}'', \boldsymbol{n})\, d\Omega''. \tag{95,28}$$

При $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}'$ мы получаем соотношение, связывающее мнимую часть амплитуды рассеяния на угол нуль с полным сечением (оптическая теорема; см. § 91).

Отметим, что уравнение (95,28) дает возможность, в принципе, найти фазу амплитуды рассеяния, если известен ее модуль, который определяется законом рассеяния. Полагая

$$f(\vartheta) = \sqrt{d\sigma/d\Omega}\; e^{i\alpha(\vartheta)}$$

и подставляя это выражение в (95,28), мы получаем интегральное уравнение для фазы $\alpha(\vartheta)$. Таким образом, зная сечение рассеяния $d\sigma/d\Omega$, мы можем, в принципе, определить и амплитуду рассеяния $f(\vartheta)$. Отметим, однако, что уравнение (95,28) не изменяется при замене $\alpha \to \pi - \alpha$, т. е. оно определяет амплитуду рассеяния с точностью до преобразования $f(\vartheta) \to -f^*(\vartheta)$. Рассмотрим теперь влияние этой неопределенности на величину фазы рассеяния. Для этого вычислим интеграл

$$\int |f(\theta)| e^{i\alpha(\theta)} P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta =$$
$$= \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}\int (2l+1)\left(e^{2i\delta_l}-1\right) P_l P_{l'} \sin\theta\, d\theta$$

Используя свойства ортогональности полиномов Лежандра, получаем

$$\int |f(\theta)| e^{i\alpha(\theta)} P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{1}{ik}\left(e^{2i\delta_{l'}} - 1\right). \qquad (95,29)$$

Приравнивая действительные части соотношения (95,29), находим

$$\int |f(\theta)| \cos\alpha(\theta)\, P_l(\cos\theta)\, d\cos\theta = \frac{\sin 2\delta_l}{k}. \qquad (95,30)$$

Из формулы (95,30) ясно, что замена α на $\pi - \alpha$ приводит к изменению знака левой части. Для сохранения равенства необходимо изменить знак всех фаз δ_l на обратный. Итак, неопределенность в величине α приводит к неопределенности в знаке всех фаз.

Если определить независимым образом знак хотя бы у одной из фаз, то связь δ_l со всеми остальными фазами становится однозначной. Знак одной (а именно нулевой) фазы может быть установлен, например, из изучения рассеяния и интерференции медленных частиц. Следует указать, что хотя приведенные расчеты убеждают нас в возможности определения амплитуды рассеяния, решение интегрального уравнения (95,28) является трудной задачей.

§ 96. S-матрица и теория возмущений

Если полный гамильтониан можно представить в виде суммы

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}',$$

где $\hat{H}_0$ описывает поведение невзаимодействующих частиц, и $\hat{H}'$ — их взаимодействие, то для нахождения явного вида S-матрицы удобно воспользоваться представлением взаимодействия.