и подставляя это выражение в (95,28), мы получаем интегральное уравнение для фазы $\alpha(\vartheta)$. Таким образом, зная сечение рассеяния $d\sigma/d\Omega$, мы можем, в принципе, определить и амплитуду рассеяния $f(\vartheta)$. Отметим, однако, что уравнение (95,28) не изменяется при замене $\alpha \to \pi - \alpha$, т. е. оно определяет амплитуду рассеяния с точностью до преобразования $f(\vartheta) \to \to -f^*(\vartheta)$. Рассмотрим теперь влияние этой неопределенности на величину фазы рассеяния. Для этого вычислим интеграл

$$\int |f(\theta)| e^{i\alpha(\theta)} P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta =$$
$$= \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}\int (2l+1)\left(e^{2i\delta_l}-1\right) P_l P_{l'} \sin\theta\, d\theta$$

Используя свойства ортогональности полиномов Лежандра, получаем

$$\int |f(\theta)| e^{i\alpha(\theta)} P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{1}{ik}\left(e^{2i\delta_{l'}} - 1\right). \qquad (95,29)$$

Приравнивая действительные части соотношения (95,29), находим

$$\int |f(\theta)| \cos\alpha(\theta)\, P_l(\cos\theta)\, d\cos\theta = \frac{\sin 2\delta_l}{k}. \qquad (95,30)$$

Из формулы (95,30) ясно, что замена α на $\pi - \alpha$ приводит к изменению знака левой части. Для сохранения равенства необходимо изменить знак всех фаз δ_l на обратный. Итак, неопределенность в величине α приводит к неопределенности в знаке всех фаз.

Если определить независимым образом знак хотя бы у одной из фаз, то связь δ_l со всеми остальными фазами становится однозначной. Знак одной (а именно нулевой) фазы может быть установлен, например, из изучения рассеяния и интерференции медленных частиц. Следует указать, что хотя приведенные расчеты убеждают нас в возможности определения амплитуды рассеяния, решение интегрального уравнения (95,28) является трудной задачей.

§ 96. S-матрица и теория возмущений

Если полный гамильтониан можно представить в виде суммы

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}',$$

где $\hat{H}_0$ описывает поведение невзаимодействующих частиц, и $\hat{H}'$ — их взаимодействие, то для нахождения явного вида S-матрицы удобно воспользоваться представлением взаимодействия.

Волновая функция в этом представлении определена уравнением (49,21). Оператор $\hat{V}(t, t_0)$, даваемый формулой (49,1), который по определению, переводит волновую функцию, заданную в момент времени t_0, в волновую функцию в момент времени t, можно написать и в представлении взаимодействия. Именно,

$$\varphi(t) = \hat{V}(t, t_0)\,\varphi(t_0); \tag{96,1}$$

подставляя в (49,21), находим

$$i\hbar \frac{\partial \hat{V}(t, t_0)}{\partial t} = \hat{H}'_{\text{int}}(t)\,\hat{V}(t, t_0), \tag{96,2}$$

$$\hat{V}(t_0, t_0) = 1. \tag{96,3}$$

Системе (96,2) и (96,3) можно сопоставить интегральное уравнение

$$\hat{V}(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\,\hat{H}'_{\text{int}}(t')\,\hat{V}(t', t_0). \tag{96,4}$$

Интегральное уравнение (96,4) может быть решено по методу последовательных приближений:

$$\hat{V}(t, -\infty) = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt_1\,\hat{H}'_{\text{int}}(t_1) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2\,\hat{H}'_{\text{int}}(t_1)\,\hat{H}'_{\text{int}}(t_2) + \ldots \tag{96,5}$$

Общий член ряда имеет вид

$$\hat{V}^{(n)} = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} \hat{H}'_{\text{int}}(t_1)\,\hat{H}'_{\text{int}}(t_2)\ldots\hat{H}'_{\text{int}}(t_n)\,dt_n. \tag{96,6}$$

Очевидно, что области интегрирования по переменным $t_1, t_2, \ldots$ $\ldots, t_n$ располагаются в порядке

$$t_1 > t_2 > \ldots > t_n. \tag{96,7}$$

Для того чтобы упростить запись и получить возможность не следить за порядком выполнения интегрирования, удобно симметризовать формулу (96,6). В случае функции, симметричной относительно своих переменных, можно воспользоваться известной формулой

$$\int_a^b dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} dt_n f(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{n!}\int_a^b dt_1 \int_a^b dt_2 \ldots \int_a^b dt_n f(t_1, \ldots, t_n). \tag{96,8}$$

С указанной целью введем так называемый хронологический оператор P, который, по определению, располагает зависящие от времени операторы в хронологической последовательности, т. е. в порядке убывания времени (96,7):

$$PL(t_1)\,M(t_2)=\begin{cases} L(t_1)\,M(t_2) & \text{при} \quad t_1>t_2, \\ M(t_2)\,L(t_1) & \text{при} \quad t_2>t_1. \end{cases} \tag{96,9}$$

Представлением этого оператора может служить, например, выражение

$$P=\frac{1+\varepsilon(t_1-t_2)}{2}+\frac{1-\varepsilon(t_1-t_2)}{2},$$

где $\varepsilon(x)$ — так называемая знаковая функция

$$\varepsilon(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad x>0, \\ -1 & \text{при} \quad x<0. \end{cases}$$

С помощью хронологического оператора можно написать

$$\int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}'_{\text{int}}(t_1) \ldots \hat{H}'_{\text{int}}(t_n) =$$

$$=\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{t} dt_n P\{\hat{H}'_{\text{int}}(t_1) \ldots \hat{H}'_{\text{int}}(t_n)\}. \tag{96,10}$$

Поэтому для $\hat{V}(t, -\infty)$ находим

$$\hat{V}(t, -\infty)=1+\sum_n\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n\frac{i}{n!}\int_{-\infty}^{t} dt_1 \ldots$$

$$\ldots \int_{-\infty}^{i} dt_n P\{\hat{H}'_{\text{int}}(t_1) \ldots \hat{H}'_{\text{int}}(t_n)\} = P\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}\hat{H}'_{\text{int}}(t)\,dt\right\}.$$

В соответствии с определением S-матрицы

$$S=\lim_{\substack{t\to\infty \\ t_0\to\infty}}\hat{V}(t, t_0)=\lim_{t\to\infty}\hat{V}(t, -\infty)=P\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}'_{\text{int}}(t)\,dt\right\}. \tag{96,11}$$

Полученная формула, именуемая формулой Дайсона, позволяет связать S-матрицу с энергией взаимодействия $\hat{H}'$ (если последняя существует). Она является точной в том смысле, что в ней выполнено суммирование всего ряда теории возмущений.

Нетрудно убедиться, что первые члены разложения общей формулы для S-матрицы приводят к обычной теории возмущений.

Для простоты выкладок ограничимся первым порядком теории возмущений, написав

$$S^{(1)} = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \hat{H}'_{\text{int}}(t).$$

Оператор P в этом случае тождественно равен единице. Беря матричный элемент по состояниям $a \neq b$, которые являются собственными состояниями гамильтониана H_0, имеем

$$S_{ba} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, (\hat{H}'_{\text{int}})_{ba}.$$

Переходя к представлению Шредингера и пользуясь определением (49,19), получаем

$$S_{ba}^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \langle b | \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right) \hat{H}' \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right) | a \rangle =$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \langle b | \hat{H}' | a \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)\, t\right] dt = 2\pi i \hat{H}'_{ba} \delta(E_b - E_a).$$

Мы видим, что S'_{ba} совпадает с амплитудой перехода в первом приближении теории возмущений.

Аналогичные, хотя и более громоздкие вычисления, позволяют отождествить $S_{ba}^{(2)}$ с амплитудой перехода во втором порядке теории возмущений.

Несмотря на удобство записи формулы Дайсона, которой часто пользуются в промежуточных выкладках, для фактического вычисления S-матрицы приходится проводить разложение в ряд и выполнять почленное интегрирование.

Важной особенностью формулы Дайсона является то, что она легко может быть преобразована к релятивистски-инвариантному виду. Поэтому она имеет особенно большое значение при расчете релятивистских эффектов.

§ 97. Аналитические свойства S-матрицы

Как мы уже подчеркивали, с помощью аппарата S-матрицы может быть получен ряд важных результатов теории рассеяния, не связанных с использованием конкретного вида потенциала взаимодействия. Это связано, в частности, с изучением аналити-