§ 100. Квантовая механика фотона

Опытное установление квантовой, или, как часто говорят, корпускулярной природы света послужило толчком к созданию квантовой теории в целом.

С другой стороны, построение последовательной квантовой теории электромагнитного поля явилось одним из наиболее выдающихся успехов квантовой теории.

Кванты света или фотоны являются элементарными частицами, отличительной особенностью которых служит то, что их масса покоя равна нулю. Поэтому они всегда движутся со скоростью c в пустоте. Это обстоятельство приводит к некоторым важным особенностям в методе описания их поведения. Именно, связь между энергией и импульсом фотона дается общей формулой

$$\varepsilon = cp = \hbar ck. \tag{100,1}$$

Если заменить импульс фотона оператором, то оператор энергии в импульсном представлении имеет вид

$$\hat{H} = c\hat{p} = \hbar c\hat{k}. \tag{100,2}$$

Соответственно можно написать уравнение Шредингера в импульсном представлении

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi_p, \tag{100,3}$$

где ψ_p — волновая функция фотона в импульсном представлении.

Оператор $\hat{H}$ связан с энергией фотона общей формулой

$$\varepsilon = \int \psi_p^* \hat{H} \psi_p \, d\boldsymbol{p} = \hbar c \int \psi_p^* \hat{k} \psi_p \, d\boldsymbol{p}. \tag{100,4}$$

С другой стороны, можно считать, что фотону адекватно электромагнитное поле, существующее во всем пространстве. Его энергия

$$\varepsilon = \int \frac{\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2}{8\pi} dV = \frac{1}{4\pi} \int \boldsymbol{E}^2 \, dV. \tag{100,5}$$

Естественно отождествить энергию фотона с энергией электромагнитного поля. Оба вектора поля удовлетворяют уравнениям Максвелла, которые приводятся к виду

$$\Delta \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0,$$

и аналогично для вектора $\boldsymbol{H}$.

Разлагая $\boldsymbol{E}$ в интеграл Фурье

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, t)\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{k},$$

имеем

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, t)}{\partial t^2} + k^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, t) = 0,$$

или

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, t)}{\partial t} - ik\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, t)\right]\left[\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, t)}{\partial t} + ik\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, t)\right] = 0. \qquad (100{,}6)$$

В силу вещественности поля должно выполняться условие

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{E}(-\boldsymbol{k}). \qquad (100{,}7)$$

Введем вместо компоненты Фурье $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, t)$ новую функцию $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}, t)$, определенную соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, t) &= N(k)\,[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}, t) + \boldsymbol{f}^*(-\boldsymbol{k}, t)], \\ \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}, t) &= -ikN(k)\,[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}, t) - \boldsymbol{f}^*(-\boldsymbol{k}, t)], \end{aligned}\right\} \qquad (100{,}8)$$

где N — множитель пропорциональности. Точкой обозначено дифференцирование по времени.

Нетрудно видеть, что при таком представлении $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, t)$ условие (100,7) выполняется автоматически.

Подставляя значения $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, t)$ и $\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}, t)$ в (100,6), приходим к двум уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} i\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} &= k\boldsymbol{f}, \\ -i\frac{\partial \boldsymbol{f}^*}{\partial t} &= k\boldsymbol{f}^*. \end{aligned}\right\} \qquad (100{,}9)$$

Подчеркнем, что уравнения (100,9) представляют собой не что иное, как другую форму записи уравнений Максвелла. Умножая (100,9) на $\hbar$, получаем

$$\left.\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} &= p\boldsymbol{f}, \\ -i\hbar\frac{\partial \boldsymbol{f}^*}{\partial t} &= p\boldsymbol{f}^*. \end{aligned}\right\} \qquad (100{,}10)$$

Мы видим, что функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}, t)$ удовлетворяет уравнению, которое по форме является тождественным с уравнением Шредингера. Если заменить p оператором $\hat{H}$, то функцию $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}, t)$ следует отождествить с волновой функцией фотона в k-представлении.

Множитель пропорциональности N, остававшийся до сих пор произвольным, можно определить из сопоставления (100,4) и (100,5).

Подставляя в (100,5) разложение (100,8), имеем

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, t)\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, t)\exp\left[i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\boldsymbol{r}\right] d\boldsymbol{k}\,d\boldsymbol{k}'\,dV = \\
&= \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, t)\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}', t)\,d\boldsymbol{k}\,d\boldsymbol{k}'\int \exp\left[i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\boldsymbol{r}\right] dV = \\
&= \frac{(2\pi)^3}{4\pi}\int (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, t)\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}', t)\,\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\,d\boldsymbol{k}\,d\boldsymbol{k}' = \\
&= 2\pi^2\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, t)\,\boldsymbol{E}(-\boldsymbol{k}, t)\,d\boldsymbol{k} = 4\pi^2\int N^2(k)\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{k})\,\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

При $N=\sqrt{\dfrac{ck\hbar}{4\pi^2}}$ энергия электромагнитного поля и энергия фотона оказываются тождественными. Итак, в k-представлении фотон описывается волновой функцией

$$\psi(\boldsymbol{k}, t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}, t),$$

причем выполнено условие

$$\int \boldsymbol{f}^*\boldsymbol{f}\,d\boldsymbol{k} = 1.$$

При этом уравнения Максвелла для электромагнитного поля монохроматической волны оказываются тождественными с уравнениями Шредингера для отдельного фототока. Вводя явную зависимость от времени, можно написать

$$\psi(\boldsymbol{k}, t) = \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{k})\exp(-i\omega t) = \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{k})\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\varepsilon t)\right].$$

Амплитуда в k-пространстве в силу уравнения Максвелла

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0$$

удовлетворяет условию

$$\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{k}) = 0.$$

Мы не будем останавливаться на вопросах нормировки волновой функции и на расчете других квантовомеханических величин фототока, например, момента, спина, четности и т. д., отсылая интересующихся к монографии А. И. Ахиезера и В. Б. Берестецкого [1]).

Ограничимся лишь несколькими принципиально важными замечаниями. Подчеркнем прежде всего, что поскольку уравнения Максвелла являются релятивистски-инвариантными, уравнение Шредингера для фотона также релятивистски-инвариантно.

---

1) А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, «Наука», 1969.

Это и естественно, поскольку фотон всегда движется со скоростью света.

Мы нашли волновую функцию фотона в k-представлении (или, что то же самое, в p-представлении). Эта волновая функция имеет обычный вероятностный смысл. Однако волновой функции фотона в x-представлении, позволяющей установить вероятность локализации фотона в данной точке пространства, не существует.

Для свободных частиц с массой покоя m_0, отличной от нуля, волновая функция в x-представлении получается из волновой функции в p-представлении путем преобразования Фурье.

В случае фотонов обратное фурье-преобразование дает

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}, t) = 1/(2\pi)^3 \int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}, t) \exp(i\boldsymbol{kr})\, d\boldsymbol{k}.$$

Однако, и в этом существенное отличие фотонов от частиц с $m_0 \neq 0$, положение фотона может быть определено только в результате взаимодействия с заряженными частицами, например, электронами.

Это взаимодействие определяется значением векторов поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в той точке, в которой находится электрон. Напряженность поля в некоторой точке определяется обратным преобразованием Фурье, т. е.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = 1/(2\pi)^3 \int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, t) \exp(i\boldsymbol{kr})\, d\boldsymbol{k} =$$

$$= 1/(2\pi^4) \int (c\hbar k)^{1/2} [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}, t) + \boldsymbol{f}^*(-\boldsymbol{k}, t)] \exp(i\boldsymbol{kr})\, d\boldsymbol{k}.$$

Последняя формула показывает, что напряженность поля не выражается через $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}, t)$, т. е. не определяется значением какой-либо волновой функции в той же точке пространства. Наоборот, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ определяется распределением $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}, t)$ во всем пространстве.

Фотоны обладают спином, равным единице. Однако определение спина как собственного момента покоящейся частицы в случае фотонов теряет смысл. Поэтому разделение полного момента фотона на орбитальную и спиновую части является до известной степени условным.

Последнее важное замечание связано с описанием системы фотонов.

Фотоны непосредственно не взаимодействуют друг с другом. Поэтому волновая функция системы фотонов является волновой функцией системы невзаимодействующих частиц. Фотоны как частицы с целым спином подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна.

При взаимодействии фотонов с другими частицами число фотонов изменяется в процессах излучения и поглощения. Фотоны поглощаются и излучаются поодиночке. Взаимодействие фотонов с зарядами может быть описано с помощью их волновой функции (см. цитированную монографию А. И. Ахиезера и В. Б. Берестецкого). Однако гораздо эффективнее и проще это взаимодействие описывается с помощью представления вторичного квантования. Заметим, что самый метод вторичного квантования был разработан Дираком именно для этой цели.

§ 101. Квантование поля излучения

Квантовая теория электромагнитного поля, начатая работами Дирака, основана на особых приемах, в частности на методе вторичного квантования [1]).

Напомним, что в классической теории электромагнитного поля в пустоте было показано, что свободному от зарядов электромагнитному полю можно формально сопоставить некоторую механическую систему с бесконечно большим числом степеней свободы.

Разлагая вектор-потенциал электромагнитного поля $\boldsymbol{A}$ на плоские волны и принимая бесконечный набор амплитуд разложения q_i за обобщенные координаты, можно было сопоставить электромагнитному полю некоторую механическую систему — набор осцилляторов поля (см. § 38 ч. I). Каждой фурье-компоненте разложения $\boldsymbol{A}$ отвечал один из осцилляторов. Поэтому полный набор осцилляторов поля включает бесконечно большое их число и, следовательно, электромагнитному полю можно было сопоставить механическую систему с бесконечно большим числом степеней свободы.

Гамильтониан этой системы запишем так:

$$H = \sum \frac{1}{2} \left(p_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 q_\lambda^2\right) = \sum H_\lambda, \tag{101,1}$$

где H_λ — гамильтониан λ-го осциллятора, p_λ — обобщенный импульс, отвечающий координате q_λ, ω_λ — соответствующая частота. Суммирование ведется по всем значениям частот и поляризаций.

В основе квантовой теории электромагнитного поля лежит допущение, что этой аналогии можно придать непосредственное физическое содержание. Именно, предполагается, что реальное электромагнитное поле представляет квантовую систему, подчиняющуюся обычным законам квантовой механики. Оператор гамильтона $\hat{H}$ получается из классического гамильтониана (101,1) путем обычной замены механических величин, обобщенных

[1]) Более подробное изложение квантовой теории излучения может быть найдено в книге В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.