поглощаются и излучаются поодиночке. Взаимодействие фотонов с зарядами может быть описано с помощью их волновой функции (см. цитированную монографию А. И. Ахиезера и В. Б. Берестецкого). Однако гораздо эффективнее и проще это взаимодействие описывается с помощью представления вторичного квантования. Заметим, что самый метод вторичного квантования был разработан Дираком именно для этой цели.

§ 101. Квантование поля излучения

Квантовая теория электромагнитного поля, начатая работами Дирака, основана на особых приемах, в частности на методе вторичного квантования [1]).

Напомним, что в классической теории электромагнитного поля в пустоте было показано, что свободному от зарядов электромагнитному полю можно формально сопоставить некоторую механическую систему с бесконечно большим числом степеней свободы.

Разлагая вектор-потенциал электромагнитного поля $\boldsymbol{A}$ на плоские волны и принимая бесконечный набор амплитуд разложения q_i за обобщенные координаты, можно было сопоставить электромагнитному полю некоторую механическую систему — набор осцилляторов поля (см. § 38 ч. I). Каждой фурье-компоненте разложения $\boldsymbol{A}$ отвечал один из осцилляторов. Поэтому полный набор осцилляторов поля включает бесконечно большое их число и, следовательно, электромагнитному полю можно было сопоставить механическую систему с бесконечно большим числом степеней свободы.

Гамильтониан этой системы запишем так:

$$H=\sum \frac{1}{2}\left(p_\lambda^2+\omega_\lambda^2 q_\lambda^2\right)=\sum H_\lambda, \qquad (101,1)$$

где H_λ — гамильтониан λ-го осциллятора, p_λ — обобщенный импульс, отвечающий координате q_λ, ω_λ — соответствующая частота. Суммирование ведется по всем значениям частот и поляризаций.

В основе квантовой теории электромагнитного поля лежит допущение, что этой аналогии можно придать непосредственное физическое содержание. Именно, предполагается, что реальное электромагнитное поле представляет квантовую систему, подчиняющуюся обычным законам квантовой механики. Оператор гамильтона $\hat{H}$ получается из классического гамильтониана (101,1) путем обычной замены механических величин, обобщенных

---

[1]) Более подробное изложение квантовой теории излучения может быть найдено в книге В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.

координат и импульсов, соответствующими квантовыми операторами. Именно, заменим q_λ и p_λ операторами, удовлетворяющими соотношениям коммутации:

$$\hat{p}_\lambda \hat{q}_\mu - \hat{q}_\mu \hat{p}_\lambda = \frac{\hbar}{i} \delta_{\lambda\mu},$$

$$\hat{q}_\lambda \hat{q}_\mu - \hat{q}_\mu \hat{q}_\lambda = 0, \quad \hat{p}_\lambda \hat{p}_\mu - \hat{p}_\mu \hat{p}_\lambda = 0.$$

Поскольку различные осцилляторы поля являются независимыми, то операторы $\hat{p}_\lambda$ и $\hat{q}_\mu$, относящиеся к различным осцилляторам, коммутируют между собой. Тогда $\hat{H}$ будет представлять оператор Гамильтона квантовой системы. Целесообразно, однако, сделать каноническое преобразование к новым переменным (ср. с формулами (50,11)). Именно, напишем:

$$\hat{a}_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\omega_\lambda}{\hbar}}\, \hat{q}_\lambda + \frac{i\hat{p}_\lambda}{\sqrt{\omega_\lambda \hbar}} \right),$$

$$\hat{a}_\lambda^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\omega_\lambda}{\hbar}}\, \hat{q}_\lambda - \frac{i\hat{p}_\lambda}{\sqrt{\omega_\lambda \hbar}} \right). \qquad (101,2)$$

В новом представлении

$$\hat{p}_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 \hat{q}_\lambda^2 = \hbar\omega_\lambda \left(\hat{a}_\lambda \hat{a}_\lambda^+ + \hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_\lambda \right),$$

так что

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \left(\hat{a}_\lambda \hat{a}_\lambda^+ + \hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_\lambda \right).$$

Операторам $\hat{a}_\lambda$ и $\hat{a}_\lambda^+$ отвечают перестановочные соотношения

$$\left.\begin{aligned} \hat{a}_\lambda \hat{a}_\mu^+ - \hat{a}_\mu^+ \hat{a}_\lambda &= \delta_{\lambda\mu}, \\ \hat{a}_\lambda \hat{a}_\mu - \hat{a}_\mu \hat{a}_\lambda &= 0, \\ \hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_\mu^+ - \hat{a}_\mu^+ \hat{a}_\lambda^+ &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (101,3)$$

что сразу следует из определения и перестановочных соотношений для $\hat{p}_\lambda$ и $\hat{q}_\lambda$.

С помощью (101,3) гамильтониан можно преобразовать, написав

$$\hat{a}_\lambda \hat{a}_\lambda^+ = 1 + \hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_\lambda.$$

Тогда

$$\hat{H} = \sum \hbar\omega_\lambda \left(\hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_\lambda + \frac{1}{2} \right). \qquad (101,4)$$

Сравнивая выражение (101,4) для $\hat{H}$ и перестановочные соотношения (101,3) для операторов $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ с соответствующими выражениями (99,9) и (99,21), мы убеждаемся в их полной аналогии. Это означает, что свободное электромагнитное поле представляет систему бозонов, именуемых обычно фотонами или световыми квантами.

Каждой плоской волне в разложении ((38,19) ч. I) отвечает один фотон. Энергия каждого фотона, согласно формуле (101,4), равна $\hbar\omega_\lambda$. Полная энергия электромагнитного поля соответственно имеет вид

$$E=\sum E_\lambda n_\lambda+\sum\frac{\hbar\omega_\lambda}{2}=\sum E_\lambda n_\lambda+E_0, \qquad (101,5)$$

где $E_\lambda=\hbar\omega_\lambda$, а n_λ — число фотонов с энергией E_λ.

Второе слагаемое в формуле (101,5), обозначенное через E_0, носит название энергии нулевых колебаний электромагнитного поля. Формула (101,5) показывает, что если все $n_\lambda=0$, т. е. в поле нет фотонов, то энергия электромагнитного поля равна E_0. Более того, сама величина E_0 бесконечно велика, так как в сумму для E_0 входит бесконечно большое число положительных слагаемых $\hbar\omega_\lambda$.

Наличие в энергии электромагнитного поля бесконечно большого постоянного слагаемого не сказывается на процессах взаимодействия поля с веществом — излучением, поглощением и рассеянием света, которые будут рассмотрены в этой главе. При этих процессах имеет место такое изменение состояния электромагнитного поля, при котором имеет значение лишь разность энергий двух состояний.

При образовании разности энергий нулевая энергия сокращается. Поэтому до сравнительно недавнего времени считалось, что нулевая энергия может быть принята за начало отсчета энергии и формально опущена во всех выражениях. Однако развитие квантовой электродинамики показало, что это не так и появление в формуле для энергии электромагнитного поля слагаемого E_0 имеет глубокий смысл.

С точки зрения современной электродинамики «пустота» — отсутствие частиц и фотонов — не есть «ничто», но есть определенное состояние поля, именуемое вакуумом. Существование вакуума и нулевых колебаний с частотами ω_λ сказывается на некоторых взаимодействиях между электромагнитным полем и электронами и приводит при этом к ряду наблюдавшихся эффектов.

Кратко мы коснемся вопроса о вакууме в § 116. Пока же мы не будем рассматривать нулевую энергию.

Найдем теперь импульс электромагнитного поля, свободного от зарядов. Согласно (38,25) ч. I, для импульса плоской волны имеем

$$\boldsymbol{p}_\lambda=\frac{\boldsymbol{k}_\lambda}{k_\lambda c}E_\lambda, \qquad (101,6)$$

где $\boldsymbol{k}_\lambda$ и E_λ — соответственно волновой вектор и энергия волны.

Если перейти к квантованным выражениям и заменить E_λ ее собственным значением, то легко получаем

$$\boldsymbol{p}_\lambda = \hbar \boldsymbol{k}_\lambda.$$

Подобно тому как $\hbar\omega_\lambda$ представляет энергию отдельного фотона, так и $\hbar\boldsymbol{k}_\lambda$ является его импульсом. Мы видим, что между энергией и импульсом фотона существует соотношение, найденное из анализа опытных данных еще до создания квантовой механики:

$$|\boldsymbol{p}_\lambda| = \frac{E_\lambda}{c}.$$

Из (101,6) вытекает, в частности, что масса покоя фотона равна нулю (см. § 14 ч. II). Полный импульс электромагнитного поля равен

$$\boldsymbol{P} = \sum \hbar \boldsymbol{k}_\lambda n_\lambda. \tag{101,7}$$

Он определяется числами заполнения n_λ.

Перейдем теперь к формулировке уравнения Шредингера для электромагнитного поля. Оно имеет обычный вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi.$$

Волновая функция электромагнитного поля именуется обычно амплитудой состояния поля. Если воспользоваться гамильтонианом в представлении чисел заполнения, то амплитуда состояния электромагнитного поля также будет функцией чисел заполнения n_λ

$$\psi = \psi(n_1, n_2, \ldots n_\lambda, \ldots t).$$

Операторы $\hat{a}_\lambda^+$ и $\hat{a}_\lambda$, согласно выводам § 99, представляют собой операторы рождения и поглощения фотонов. При действии их на волновую функцию они соответственно увеличивают и уменьшают на единицу число фотонов с частотой ω_λ. Матричные элементы этих операторов даются формулами (99,6), (99,7).

§ 102. Взаимодействие электрона с излучением

Проведя квантование свободного электромагнитного поля, мы можем перейти к рассмотрению системы, состоящей из электромагнитного поля и частиц. Будем считать, что в поле излучения находится один электрон и найдем взаимодействие между электроном и электромагнитным полем. В этой главе мы будем предполагать, что электрон имеет скорость малую по сравнению со скоростью света и описывается нерелятивистским гамильтонианом. Напишем гамильтониан системы (поле излучения +