Если перейти к квантованным выражениям и заменить E_λ ее собственным значением, то легко получаем

$$\boldsymbol{p}_\lambda = \hbar \boldsymbol{k}_\lambda.$$

Подобно тому как $\hbar\omega_\lambda$ представляет энергию отдельного фотона, так и $\hbar\boldsymbol{k}_\lambda$ является его импульсом. Мы видим, что между энергией и импульсом фотона существует соотношение, найденное из анализа опытных данных еще до создания квантовой механики:

$$|\boldsymbol{p}_\lambda| = \frac{E_\lambda}{c}.$$

Из (101,6) вытекает, в частности, что масса покоя фотона равна нулю (см. § 14 ч. II). Полный импульс электромагнитного поля равен

$$\boldsymbol{P} = \sum \hbar \boldsymbol{k}_\lambda n_\lambda. \qquad (101,7)$$

Он определяется числами заполнения n_λ.

Перейдем теперь к формулировке уравнения Шредингера для электромагнитного поля. Оно имеет обычный вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi.$$

Волновая функция электромагнитного поля именуется обычно амплитудой состояния поля. Если воспользоваться гамильтонианом в представлении чисел заполнения, то амплитуда состояния электромагнитного поля также будет функцией чисел заполнения n_λ

$$\psi = \psi(n_1, n_2, \ldots n_\lambda, \ldots t).$$

Операторы $\hat{a}_\lambda^+$ и $\hat{a}_\lambda$, согласно выводам § 99, представляют собой операторы рождения и поглощения фотонов. При действии их на волновую функцию они соответственно увеличивают и уменьшают на единицу число фотонов с частотой ω_λ. Матричные элементы этих операторов даются формулами (99,6), (99,7).

§ 102. Взаимодействие электрона с излучением

Проведя квантование свободного электромагнитного поля, мы можем перейти к рассмотрению системы, состоящей из электромагнитного поля и частиц. Будем считать, что в поле излучения находится один электрон и найдем взаимодействие между электроном и электромагнитным полем. В этой главе мы будем предполагать, что электрон имеет скорость малую по сравнению со скоростью света и описывается нерелятивистским гамильтонианом. Напишем гамильтониан системы (поле излучения +

+ электрон) в виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\hat{\boldsymbol{A}}\right)^2 + \hat{H}_{\text{изл}}.$$

Мы предполагаем, что скалярный потенциал φ выбран равным нулю, а условие калибровки (см. (10,5) ч. 1) векторного потенциала $\boldsymbol{A}$ имеет вид

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0.$$

Из этого соотношения следует, что оператор импульса $\hat{\boldsymbol{p}}$ коммутирует с вектором $\boldsymbol{A}$, и поэтому гамильтониан $\hat{H}$ может быть переписан как

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} - \frac{e}{mc}(\hat{\boldsymbol{p}}\hat{\boldsymbol{A}}) + \frac{e^2}{2mc^2}\hat{\boldsymbol{A}}^2 + \hat{H}_{\text{изл}}. \qquad (102,1)$$

Первое слагаемое в (102,1) представляет гамильтониан свободной частицы, последнее — гамильтониан свободного поля излучения. Гамильтониан взаимодействия электрона с полем излучения, ответственный за все процессы испускания и поглощения фотонов электроном, имеет вид

$$\hat{H}' = -\frac{e}{mc}(\hat{\boldsymbol{p}}\hat{\boldsymbol{A}}) + \frac{e^2}{2mc^2}\hat{\boldsymbol{A}}^2. \qquad (102,2)$$

Мы будем формально считать заряд электрона малым параметром, по которому проводится разложение теории возмущений. В дальнейшем мы увидим, что фактически разложение ведется по степеням малой величины $\frac{e^2}{\hbar c}\left(\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}\right)$, которая фигурирует в соответствующих матричных элементах и именуется константой взаимодействия. Мы ограничимся рассмотрением некоторых простейших процессов в первом неисчезающем приближении теории возмущений. Общие выражения для вероятностей различных процессов были получены нами в § 56, и наша задача сводится к вычислению матричных элементов оператора взаимодействия $\hat{H}'$, рассматриваемого как оператор возмущения. Разложение вектора-потенциала удобно представить в виде (38,19) ч. I:

$$\boldsymbol{A} = \sum_{\lambda}\left(b_\lambda \boldsymbol{A}_\lambda + b_\lambda^* \boldsymbol{A}_\lambda^*\right),$$

где

$$\boldsymbol{A}_\lambda = \boldsymbol{e}_\lambda \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}}\, e^{i\boldsymbol{k}_\lambda \boldsymbol{r}}. \qquad (102,3)$$

Переходим к квантовым операторам:

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \sum_{\lambda}\left(\hat{b}_\lambda \boldsymbol{A}_\lambda + \hat{b}_\lambda^+ \boldsymbol{A}_\lambda^*\right). \qquad (102,3')$$

Используя соотношения (38,20) ч. I, выражаем операторы $\hat{b}_\lambda$ и $\hat{b}_\lambda^+$ через операторы $\hat{q}_\lambda$ и $\hat{p}_\lambda$:

$$\hat{b}_\lambda = \frac{1}{2\omega_\lambda}(\omega_\lambda \hat{q}_\lambda + i\hat{p}_\lambda), \quad \hat{b}_\lambda^+ = \frac{1}{2\omega_\lambda}(\omega_\lambda \hat{q}_\lambda - i\hat{p}_\lambda).$$

Используя формулы (101,2), введем операторы $\hat{a}_\lambda$ и $\hat{a}_\lambda^+$. Тогда получим

$$\hat{b}_\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\lambda}}\,\hat{a}_\lambda, \quad \hat{b}_\lambda^+ = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\lambda}}\,\hat{a}_\lambda^+. \tag{102,4}$$

Сравнивая с (99,6), (99,7), находим, что операторы $\hat{b}_\lambda$ и $\hat{b}_\lambda^+$ имеют следующие отличные от нуля матричные элементы:

$$\left.\begin{aligned}(n_1, \ldots n_\lambda, \ldots |\, \hat{b}_\lambda \,| n_1, \ldots n_\lambda + 1, \ldots) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\lambda}(n_\lambda + 1)},\\ (n_1, \ldots n_\lambda, \ldots \,|\, \hat{b}_\lambda^+ \,|\, n_1, \ldots n_\lambda - 1, \ldots) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\lambda} n_\lambda}.\end{aligned}\right\} \tag{102,5}$$

Таким образом, матричные элементы вектора-потенциала отличны от нуля только для процессов излучения и поглощения одного фотона. Для оператора $(\hat{A})^2$, входящего в (102,2), имеем

$$(\hat{A})^2 = \sum_{\lambda, \lambda'} \left\{\hat{b}_\lambda \hat{b}_{\lambda'} (\boldsymbol{A}_\lambda \boldsymbol{A}_{\lambda'}) + \hat{b}_\lambda \hat{b}_{\lambda'}^+ (\boldsymbol{A}_\lambda \boldsymbol{A}_{\lambda'}^*) + \hat{b}_\lambda^+ \hat{b}_{\lambda'} (\boldsymbol{A}_\lambda^* \boldsymbol{A}_{\lambda'}) + \hat{b}_\lambda^+ \hat{b}_{\lambda'}^+ (\boldsymbol{A}_\lambda^* \boldsymbol{A}_{\lambda'}^*)\right\}. \tag{102,6}$$

Из этого выражения видно, что матричные элементы оператора $(\hat{A})^2$ отличны от нуля для двухфотонных переходов, т. е. при испускании или поглощении двух фотонов или испускании одного фотона и поглощения другого.

В процессы, идущие с участием двух фотонов, дает вклад как оператор, содержащий $\hat{A}^2$, так и оператор $-\frac{e}{mc}(\hat{\boldsymbol{p}}\hat{\boldsymbol{A}})$, но уже во втором приближении теории возмущений. Вероятность двухфотонных переходов мала по сравнению с вероятностью однофотонных переходов. Последняя определяется оператором возмущения $-\frac{e}{mc}(\hat{\boldsymbol{p}}\hat{\boldsymbol{A}})$.

Вектор-потенциал (102,3) описывает состояние фотона с заданным импульсом. С таким же успехом можно ввести понятие о состоянии фотона с заданным моментом количества движения. Чтобы найти выражение для вектора-потенциала, описывающего состояние фотона с заданным полным моментом количества движения и его проекций на ось z, мы должны были бы произвести разложение вектора-потенциала $\boldsymbol{A}$ не по плоским, а по сферическим волнам. Амплитуды разложения должны рассматриваться как операторы в пространстве чисел заполнения, удовлетворяющие коммутационным соотношениям такого же типа, что и (101,3). В состоянии с заданным импульсом момент количества движения фотона не имеет определенного значения. Это соответствует тому, что плоская волна может быть представлена в виде разложения по бесконечному ряду сферических волн.

Фотон обладает определенными «внутренними» степенями свободы, так как при описании его состояния необходимо учесть различные возможные поляризации.

Обычно «внутреннее» состояние системы связывается с ее спином. Однако определение спина системы, как ее «собственного» момента количества движения, т. е. момента количества движения в состоянии покоя, к фотону неприменимо. Фотон в любой системе отсчета движется со скоростью c.

Тем не менее и для фотона иногда оказывается удобным ввести понятие спина, представив оператор полного момента количества движения в виде суперпозиции оператора орбитального момента и оператора спина. При этом, как оказывается, спин фотона следует считать равным единице. В соответствии с тремя возможными проекциями спина $s_z = 0, \pm 1$, казалось бы фотон может находиться в трех различных состояниях с разной поляризацией. Однако условие поперечности электромагнитных волн приводит к тому, что фактически возможны лишь две проекции спина, которые и соответствуют двум независимым состояниям поляризации фотона. Подробное рассмотрение затронутых здесь вопросов читатель найдет в монографии А. И. Ахиезера и В. Б. Берестецкого [1]).

§ 103. Поглощение и излучение света

Рассмотрим вероятность однофотонного перехода — процесс поглощения и излучения. Выпишем прежде всего матричные элементы, отвечающие поглощению и излучению фотона с частотой ω_λ. Предположим, что электрон находился в начальном состоянии ψ_1 до поглощения и в состоянии ψ_2 после поглощения. Переход $1 \to 2$ идет с поглощением, а $2 \to 1$ с излучением фотона частоты ω_λ. Матричный элемент оператора возмущения (102,2) для перехода с поглощением фотона имеет вид

$$(2,\, n_\lambda - 1\,|\,\hat{H}'\,|\,1,\, n_\lambda) = -\frac{e}{mc}\int \psi_2^*(\hat{p}\mathbf{e}_\lambda)\sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}}\,e^{i\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r}}(b_\lambda)_{n_\lambda - 1,\, n_\lambda} \times$$
$$\times\,\psi_1\,dV = -\frac{e}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar n_\lambda}{V\omega_\lambda}}\int \psi_2^*(\hat{p}\mathbf{e}_\lambda)\,e^{i\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r}}\,\psi_1\,dV. \qquad (103,1)$$

---

[1]) А. И. Ахиезер и В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, «Наука», 1969.