щие коммутационным соотношениям такого же типа, что и (101,3). В состоянии с заданным импульсом момент количества движения фотона не имеет определенного значения. Это соответствует тому, что плоская волна может быть представлена в виде разложения по бесконечному ряду сферических волн.

Фотон обладает определенными «внутренними» степенями свободы, так как при описании его состояния необходимо учесть различные возможные поляризации.

Обычно «внутреннее» состояние системы связывается с ее спином. Однако определение спина системы, как ее «собственного» момента количества движения, т. е. момента количества движения в состоянии покоя, к фотону неприменимо. Фотон в любой системе отсчета движется со скоростью c.

Тем не менее и для фотона иногда оказывается удобным ввести понятие спина, представив оператор полного момента количества движения в виде суперпозиции оператора орбитального момента и оператора спина. При этом, как оказывается, спин фотона следует считать равным единице. В соответствии с тремя возможными проекциями спина $s_z = 0, \pm 1$, казалось бы фотон может находиться в трех различных состояниях с разной поляризацией. Однако условие поперечности электромагнитных волн приводит к тому, что фактически возможны лишь две проекции спина, которые и соответствуют двум независимым состояниям поляризации фотона. Подробное рассмотрение затронутых здесь вопросов читатель найдет в монографии А. И. Ахиезера и В. Б. Берестецкого [1]).

§ 103. Поглощение и излучение света

Рассмотрим вероятность однофотонного перехода — процесс поглощения и излучения. Выпишем прежде всего матричные элементы, отвечающие поглощению и излучению фотона с частотой ω_λ. Предположим, что электрон находился в начальном состоянии ψ_1 до поглощения и в состоянии ψ_2 после поглощения. Переход $1 \to 2$ идет с поглощением, а $2 \to 1$ с излучением фотона частоты ω_λ. Матричный элемент оператора возмущения (102,2) для перехода с поглощением фотона имеет вид

$$(2,\ n_\lambda - 1\,|\,\hat{H}'\,|\,1,\ n_\lambda) = -\frac{e}{mc}\int \psi_2^*(\hat{p}\mathbf{e}_\lambda)\sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}}\,e^{i\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r}}(b_\lambda)_{n_\lambda-1,\,n_\lambda}\times$$
$$\times\psi_1\,dV = -\frac{e}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar n_\lambda}{V\omega_\lambda}}\int \psi_2^*(\hat{p}\mathbf{e}_\lambda)\,e^{i\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r}}\,\psi_1\,dV. \qquad (103,1)$$

---

[1]) А. И. Ахиезер и В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, «Наука», 1969.

Аналогично для процесса излучения фотона имеем

$$(1,\ n_\lambda+1\,|\,\hat{H}'\,|\,2,\ n_\lambda)=-\frac{e}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\,(n_\lambda+1)}{V\omega_\lambda}}\int\psi_1^*\left(\hat{\boldsymbol p}\boldsymbol e_\lambda\right)e^{-i\boldsymbol k_\lambda\boldsymbol r}\psi_2\,dV. \tag{103,2}$$

Вероятность перехода в единицу времени с поглощением фотона дается формулой (см. § 56)

$$dW=\frac{2\pi}{\hbar}\,|(2,\ n_\lambda-1\,|\,\hat{H}'\,|\,1,\ n_\lambda)|^2\,\rho(\omega)\,d\Omega. \tag{103,3}$$

Здесь $d\Omega$ — элемент телесного угла, отвечающий направлению распространения фотона до поглощения. Будем считать, что состояния 1 и 2 электрона принадлежат дискретному спектру. В этом случае конечное состояние системы с энергией E_2 принадлежит дискретному спектру, а начальное — с энергией $E_1+\hbar\omega$ — непрерывному спектру (поскольку частота ω изменяется непрерывным образом). При этом поглощаемый фотон может принадлежать любому из осцилляторов, находящихся в интервале состояний $d\omega\,d\Omega$ в объеме V. Число таких осцилляторов при данной поляризации на единицу объема дается формулой (38,23) ч. I. Переходя к непрерывному распределению частот, мы будем опускать индекс λ там, где это не может повести к недоразумениям или заменять его на индекс $\boldsymbol k$.

Под $\rho(\omega)$ в выражении (103,3) нужно понимать число осцилляторов в объеме V, приходящихся на единичный энергетический и угловой интервал при данной поляризации:

$$\rho(\omega)=\frac{\omega^2 V}{(2\pi c)^3\,\hbar}. \tag{103,4}$$

Для вероятности перехода в единицу времени с учетом (103,1) получаем

$$dW=\frac{e^2\omega}{m^2 2\pi\hbar c^3}\,|\left((\hat{\boldsymbol p}\boldsymbol e)\,e^{i\boldsymbol k\boldsymbol r}\right)_{21}|^2\,n_{\boldsymbol k}\,d\Omega. \tag{103,5}$$

Вероятность поглощения равна нулю для всех энергий, кроме тех, которые удовлетворяют закону сохранения

$$E_2=E_1+\hbar\omega. \tag{103,6}$$

Определим интенсивность $J_0(\omega)$ падающего излучения, приходящегося на интервал частот $d\omega$ и угловой интервал $d\Omega$. Так как на один осциллятор приходится $n_{\boldsymbol k}$ фотонов с данной поляризацией, то имеем

$$J_0(\omega)\,d\omega\,d\Omega=n_{\boldsymbol k}\hbar\omega c\rho\hbar\,d\omega\,d\Omega=n_{\boldsymbol k}\hbar\,\frac{\omega^3\,d\omega\,d\Omega}{(2\pi)^3\,c^2}.$$

Полная вероятность пропорциональна интенсивности падающего излучения. Вероятность излучения фотона электроном легко подсчитать совершенно аналогичным образом.

Вероятность перехода в единицу времени с излучением фотона с импульсом $\hbar\boldsymbol{k}$ и поляризацией $\boldsymbol{e}$ дается опять формулой типа (103,3)

$$dW = \frac{e^2\omega}{m^2 2\pi\hbar c^3} |((\hat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{e})\, e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}})_{12}|^2 (n_{\boldsymbol{k}} + 1)\, d\Omega. \qquad (103,7)$$

Вероятность излучения отлична от нуля, если частота испущенного кванта равна

$$\hbar\omega = E_2 - E_1. \qquad (103,8)$$

Мы видим далее, что вероятность перехода $2 \to 1$ с излучением фотона, даваемая формулой (103,7), состоит из двух членов Один из них пропорционален интенсивности излучения (числу фотонов $n_{\boldsymbol{k}}$), имевшейся до акта излучения. Первоначально имевшееся электромагнитное поле воздействует на электрон, способствуя его переходу в новое состояние с излучением дополнительного фотона. Это излучение именуется индуцированным или вынужденным. На существование индуцированного излучения впервые указал Эйнштейн еще до возникновения современной квантовой теории излучения. Второй член в формуле (103,7) не зависит от интенсивности первоначального излучения и обеспечивает возможность излучения и в том случае, когда до акта излучения электромагнитное поле не было возбуждено (число фотонов $n_{\boldsymbol{k}} = 0$). Излучение этого типа называется спонтанным или самопроизвольным излучением.

Из сравнения формул (103,5) и (103,7) следует с учетом эрмитовости матричных элементов, что для отношения вероятностей излучения и поглощения фотона можно написать:

$$\frac{dW_{\text{изл}}}{dW_{\text{погл}}} = \frac{n_{\boldsymbol{k}} + 1}{n_{\boldsymbol{k}}}. \qquad (103,9)$$

В дальнейшем (см. § 12 ч. VI) будет показано, что из (103,9) непосредственно следует формула Планка для распределения интенсивности в излучении черного тела.

Покажем теперь, что поглощать и излучать фотоны могут только электроны, находящиеся в связанном состоянии. Для этого вычислим интегралы, входящие в матричные элементы для вероятностей перехода, считая электрон свободным. Волновые функции ψ_1 и ψ_2 запишутся в виде плоских волн

$$\psi_1 = Ce^{i/\hbar \cdot \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}}, \quad \psi_2 = Ce^{i/\hbar \cdot \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}}.$$

C — постоянная нормировки. Подставляя эти волновые функции в (103,2), мы без труда находим:

$$\int \psi_1^* \left(\frac{\hbar}{i}\nabla\boldsymbol{e}\right) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\psi_2\, dV = |C|^2 \int e^{-i/\hbar \cdot \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}} \left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{e}\nabla\right) e^{i/\hbar\, (\boldsymbol{p}_2 - \hbar\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{r}}\, dV \sim \sim \delta(\boldsymbol{p}_2 - \hbar\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_1). \qquad (103,10)$$

Формула (103,10) выражает закон сохранения импульса при взаимодействии фотона со свободным электроном. Кроме того, при переходе имеет место закон сохранения энергии. Таким образом, должны одновременно выполняться равенства

$$\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 + \hbar \boldsymbol{k}, \qquad (103,11)$$

$$E_2 = E_1 + \hbar\omega. \qquad (103,12)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (103,11) и (103,12) несовместны. Аналогичное заключение относится, конечно, и к случаю поглощения.

Для того чтобы законы сохранения энергии и импульса могли выполняться одновременно, необходимо участие третьего тела, которому и передается избыток импульса. В случае атомных электронов таким телом может служить ядро атома.

§ 104. Дипольные переходы в атомных системах

Матричный элемент для процесса излучения фотона (103,2) в большинстве случаев может быть существенно упрощен. Обычно длина волны испускаемого фотона значительно больше линейных размеров той области пространства, в которой волновые функции электрона ψ_1 и ψ_2 заметно отличны от нуля.

Пусть, например, электрон движется в атоме, эффективный радиус которого равен a. Тогда волновые функции начального и конечного состояний весьма малы вне области радиуса a. Энергия электрона в поле ядра с эффективным зарядом Z^* по порядку величины равна $\frac{Z^*e^2}{a}$. Того же порядка и изменение энергии атома ΔE при переходе, а следовательно, и энергия излучаемого фотона. Тогда длина излучаемой волны $\lambda \approx \frac{c}{\omega} \approx \frac{\hbar c}{\hbar\omega} \approx \frac{\hbar c a}{Z^* e^2}$. Отношение размеров атома к длине волны по порядку величины равно

$$\frac{a}{\lambda} \approx \frac{Z^*e^2}{\hbar c} \approx \frac{Z^*}{137}.$$

Для внешних электронов $Z^* \approx 1$ и длина волны существенно больше размеров атома. В случае рентгеновского излучения, возникающего при переходах в K-оболочке тяжелых атомов, это приближение оказывается уже недостаточным. При $\lambda \gg a$ показатель экспоненциальной функции, стоящей под знаком интеграла в (103,2), очень мал в пределах эффективной области интегрирования и поэтому множитель $\bar{e}^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}$ можно заменить на единицу.