ГЛАВА XIII

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

§ 110. Релятивистское волновое уравнение для частицы со спином нуль

До сих пор мы ограничивались изучением свойств микрочастиц, движущихся со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света.

Действительно, при получении уравнения Шредингера мы писали нерелятивистскую функцию Гамильтона частицы во внешнем потенциальном поле

$$H=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+U(\boldsymbol{r})$$

и заменяли в ней соответствующие величины на операторы. Для получения релятивистской теории следует пользоваться той же схемой, которая была развита в § 27. Именно, для построения волнового уравнения следует использовать релятивистское выражение для функции Гамильтона. Для общности мы сразу будем считать, что частица движется во внешнем электромагнитном поле. Тогда ее функция Гамильтона имеет вид (23,17) ч. II. Производя в ней замену соответствующих величин на операторы, т. е. $H\to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, $\boldsymbol{p}\to -i\hbar\nabla$, получаем уравнение

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\varphi\right)^2\psi=c^2\left(-i\hbar\nabla-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\psi+m^2c^4\psi. \qquad (110,1)$$

Уравнение (110,1) носит название уравнения Клейна — Гордона — Фока. Релятивистская инвариантность этого уравнения очевидна. Уравнение Клейна — Гордона — Фока представляет собой волновое уравнение второго порядка.

Поскольку релятивистская функция Гамильтона в пределе переходит в функцию Гамильтона классической механики, то естественно предположить, что при $c\to\infty$ уравнение Клейна — Гордона — Фока перейдет в уравнение Шредингера. Покажем это.

Начала отсчетов для энергии в нерелятивистской теории и теории относительности различаются на mc^2, поэтому удобно ввести преобразование волновой функции ψ с помощью следующего соотношения:

$$\psi(x,\ t) = \psi'(x,\ t)\, e^{-\frac{imc^2 t}{\hbar}}.$$

Подставляя в (110,1) и вычисляя производные по времени, получаем

$$2i\hbar mc^2 \frac{\partial\psi'}{\partial t} - \hbar^2 \frac{\partial^2\psi'}{\partial t^2} - 2e\varphi\left[mc^2\psi' + i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}\right] + \\ + e^2\varphi^2\psi' = c^2\left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\psi'. \qquad (110,2)$$

Оставляя в этом уравнении только члены, пропорциональные c^2, приходим, после деления обеих частей уравнения на $2mc^2$ к обычному уравнению Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = \frac{\left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2}{2m}\psi' + e\varphi\psi'. \qquad (110,3)$$

Мы показали, таким образом, что уравнение Клейна — Гордона — Фока в нерелятивистском пределе переходит в уравнение Шредингера.

Уравнение (110,1), как и уравнение Шредингера, определяет развитие процесса во времени. Состояние частицы по-прежнему характеризуется волновой функцией $\psi(x, y, z, t)$. Эта функция зависит от координат x, y, z, t и не содержит спиновых переменных. Поэтому заведомо ясно, что уравнение Клейна — Гордона — Фока определяет поведение частиц со спином нуль. Для описания частиц со спином, отличным от нуля, оно должно быть как-то видоизменено.

Поскольку уравнение Клейна — Гордона — Фока является релятивистски-инвариантным, то при преобразованиях Лоренца волновая функция может умножаться только на некоторый постоянный фазовый множитель. Из соображений нормировки следует, что этот множитель должен равняться $+1$ (но не -1, так как преобразование Лоренца является непрерывным). При пространственном отражении координат волновая функция ψ может умножаться на $+1$ или -1. Иными словами, при воздействии оператора четности волновая функция может преобразовываться двумя способами:

$$\hat{I}\psi(x, y, z, t) = +\,\psi(-x,\ -y,\ -z,\ t),$$
$$\hat{I}\psi(x, y, z, t) = -\,\psi(-x,\ -y,\ -z,\ t).$$

Таким образом, волновая функция ψ может быть или скаляром или псевдоскаляром. По этой причине уравнение Клейна — Гордона — Фока часто называют скалярным уравнением.

В качестве примера интегрирования уравнения (110,1) рассмотрим случай свободной частицы. При этом уравнение Клейна — Гордона — Фока может быть записано в форме

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -c^2\hbar^2 \Delta\psi + m^2c^4\psi. \qquad (110,4)$$

Решение уравнения (110,4) будем искать в виде

$$\psi = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \psi_1 (x, y, z).$$

Тогда для функции ψ_1 находим

$$E^2\psi_1 = -c^2\hbar^2 \Delta\psi_1 + m^2c^4\psi_1.$$

Переписав последнее уравнение в виде

$$\Delta\psi_1 + \frac{E^2 - m^2c^4}{c^2\hbar^2} \psi_1 = 0, \qquad (110,5)$$

легко найдем, что решением его служит плоская волна вида

$$\psi_1 = ae^{\frac{ipr}{\hbar}}.$$

Подставляя найденное значение для ψ_1 в (110,5), приходим к релятивистскому соотношению между энергией E и импульсом p свободной частицы

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4.$$

Это соотношение совпадает с обычной формулой для энергии в теории относительности.

§ 111. Плотность заряда и поток вероятности для частиц со спином нуль

Мы перейдем теперь к нахождению плотности заряда и потока вероятности для частиц, описываемых скалярным волновым уравнением (110,1). Вывод выражений для этих величин производится по той же схеме, что и для уравнения Шредингера. Именно, уравнение Клейна — Гордона — Фока

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\varphi\right)^2 \psi - c^2 \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \boldsymbol{A}\right)^2 \psi - m^2c^4\psi = 0 \qquad (111,1)$$

умножаем на сопряженную волновую функцию ψ^*.

Волновое уравнение, сопряженное к уравнению (111,1), умножим на волновую функцию ψ. Из первого уравнения вычтем