Таким образом, волновая функция ψ может быть или скаляром или псевдоскаляром. По этой причине уравнение Клейна — Гордона — Фока часто называют скалярным уравнением.

В качестве примера интегрирования уравнения (110,1) рассмотрим случай свободной частицы. При этом уравнение Клейна — Гордона — Фока может быть записано в форме

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -c^2\hbar^2\Delta\psi + m^2c^4\psi. \tag{110,4}$$

Решение уравнения (110,4) будем искать в виде

$$\psi = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\psi_1(x, y, z).$$

Тогда для функции ψ_1 находим

$$E^2\psi_1 = -c^2\hbar^2\Delta\psi_1 + m^2c^4\psi_1.$$

Переписав последнее уравнение в виде

$$\Delta\psi_1 + \frac{E^2 - m^2c^4}{c^2\hbar^2}\psi_1 = 0, \tag{110,5}$$

легко найдем, что решением его служит плоская волна вида

$$\psi_1 = ae^{\frac{ipr}{\hbar}}.$$

Подставляя найденное значение для ψ_1 в (110,5), приходим к релятивистскому соотношению между энергией E и импульсом p свободной частицы

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4.$$

Это соотношение совпадает с обычной формулой для энергии в теории относительности.

§ 111. Плотность заряда и поток вероятности для частиц со спином нуль

Мы перейдем теперь к нахождению плотности заряда и потока вероятности для частиц, описываемых скалярным волновым уравнением (110,1). Вывод выражений для этих величин производится по той же схеме, что и для уравнения Шредингера. Именно, уравнение Клейна — Гордона — Фока

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\varphi\right)^2\psi - c^2\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\psi - m^2c^4\psi = 0 \tag{111,1}$$

умножаем на сопряженную волновую функцию ψ^*.

Волновое уравнение, сопряженное к уравнению (111,1), умножим на волновую функцию ψ. Из первого уравнения вычтем второе. В результате найдем:

$$-\hbar^2\left[\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}\right]-2i\hbar e\varphi\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi+\psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right)-$$
$$-\hbar^2c^2\left[\psi\,\Delta\psi^*-\psi^*\,\Delta\psi\right]-i\hbar ec\left[\psi^*(\nabla\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\nabla)\psi+\psi(\nabla\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\nabla)\psi^*\right]=0. \tag{111,2}$$

Первое выражение, стоящее в скобках, легко преобразуется к виду

$$\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right].$$

Вторая скобка есть просто производная по времени от произведения $\psi^*\psi$. С помощью векторного соотношения

$$\psi\,\Delta\psi^*=\psi\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi^*=\operatorname{div}(\psi\operatorname{grad}\psi^*)-\operatorname{grad}\psi\operatorname{grad}\psi^*$$

находим, что

$$\psi\,\Delta\psi^*-\psi^*\,\Delta\psi=\operatorname{div}\left[\psi\operatorname{grad}\psi^*-\psi^*\operatorname{grad}\psi\right].$$

Наконец, последнее выражение в скобках формулы (111,2) с помощью соотношения

$$\psi^*(\nabla\boldsymbol{A})\psi=\psi^*\operatorname{div}(\psi\boldsymbol{A})=\operatorname{div}(\psi^*\psi\boldsymbol{A})-\psi\boldsymbol{A}\operatorname{grad}\psi^*$$

приводится к виду

$$\psi^*(\nabla\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\nabla)\psi+\psi(\nabla\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\nabla)\psi^*=2\operatorname{div}(\psi\psi^*\boldsymbol{A}).$$

Если умножить все члены уравнения (111,2) на величину $\frac{e}{2i\hbar mc^2}$ и использовать указанные преобразования, то уравнение (111,2) запишется в виде

$$\operatorname{div}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0,$$

где плотность заряда ρ равна

$$\rho=\frac{e\hbar}{2imc^2}\left[\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}-\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]-\frac{e^2}{mc^2}\varphi\psi^*\psi. \tag{111,3}$$

Для плотности тока имеем при этом выражение

$$\boldsymbol{j}=\frac{i\hbar e}{2m}\left[\psi\operatorname{grad}\psi^*-\psi^*\operatorname{grad}\psi\right]-\frac{e^2}{mc^2}\psi\psi^*\boldsymbol{A}. \tag{111,4}$$

Остановимся на смысле полученных результатов. В нерелятивистской теории плотность заряда ρ можно записать в виде

$$\rho(x,\ y,\ z,\ t)=eW(x,\ y,\ z,\ t),$$

где $W(x,y,z,t)$ — есть плотность вероятности. Последняя по своему существу является положительной величиной. Соотношение (111,3), очевидно, не может быть истолковано подобным образом. Выражение для ρ может быть сделано отрицательным соответствующим подбором функции ψ в начальный момент времени.

Действительно, поскольку уравнение Клейна — Гордона — Фока является уравнением второго порядка по времени, в начальный момент времени могут быть заданы произвольные значения самой ψ-функции и ее производной по времени. Выбирая различные ψ и $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, можно прийти как к положительным, так и отрицательным значениям величины ρ.

Покажем теперь, что величина ρ/e действительно имеет своим нерелятивистским пределом произведение $\psi^*\psi$. Пусть для производной волновой функции ψ по времени выполняется соотношение

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=E\psi.$$

В таком случае выражение для плотности заряда ρ может быть записано в виде

$$\rho=\frac{eE}{mc^2}\psi^*\psi-\frac{e^2\varphi}{mc^2}\psi^*\psi.$$

Если из энергии E выделить энергию покоя, т. е. положить $E=mc^2+E'$, то в этом случае легко получаем

$$\frac{\rho}{e}=\psi^*\psi\left[1+\frac{E'-e\varphi}{mc^2}\right].$$

Если величина $E'-e\varphi\ll mc^2$, то мы имеем правильное выражение для нерелятивистского предела величины ρ/e. Мы видим, что в случае уравнения Клейна — Гордона — Фока нельзя ввести положительно определенную плотность вероятности. Это обстоятельство послужило причиной того, что в течение длительного времени уравнение Клейна — Гордона — Фока не применялось к реальным объектам.

§ 112. Понятие о поле ядерных сил

Позднее уравнению Клейна — Гордона — Фока была придана новая, совершенно иная физическая трактовка.

Мы знаем уже, что помимо электрических взаимодействий в природе реализуются и другие виды взаимодействий. В частности, такими взаимодействиями, не зависящими от электрического заряда e, являются сильные ядерные взаимодействия. Казалось естественным допустить, что ядерное взаимодействие можно связать с наличием у нуклонов особого нуклонного заряда g. При этом ядерное взаимодействие можно попытаться описать по аналогии с взаимодействием электрических зарядов, введя представление о поле ядерных сил. Это поле должно опи-