соответствующим подбором функции ψ в начальный момент времени.

Действительно, поскольку уравнение Клейна — Гордона — Фока является уравнением второго порядка по времени, в начальный момент времени могут быть заданы произвольные значения самой ψ-функции и ее производной по времени. Выбирая различные ψ и $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, можно прийти как к положительным, так и отрицательным значениям величины ρ.

Покажем теперь, что величина ρ/e действительно имеет своим нерелятивистским пределом произведение $\psi^*\psi$. Пусть для производной волновой функции ψ по времени выполняется соотношение

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=E\psi.$$

В таком случае выражение для плотности заряда ρ может быть записано в виде

$$\rho=\frac{eE}{mc^2}\psi^*\psi-\frac{e^2\varphi}{mc^2}\psi^*\psi.$$

Если из энергии E выделить энергию покоя, т. е. положить $E=mc^2+E'$, то в этом случае легко получаем

$$\frac{\rho}{e}=\psi^*\psi\left[1+\frac{E'-e\varphi}{mc^2}\right].$$

Если величина $E'-e\varphi\ll mc^2$, то мы имеем правильное выражение для нерелятивистского предела величины ρ/e. Мы видим, что в случае уравнения Клейна — Гордона — Фока нельзя ввести положительно определенную плотность вероятности. Это обстоятельство послужило причиной того, что в течение длительного времени уравнение Клейна — Гордона — Фока не применялось к реальным объектам.

§ 112. Понятие о поле ядерных сил

Позднее уравнению Клейна — Гордона — Фока была придана новая, совершенно иная физическая трактовка.

Мы знаем уже, что помимо электрических взаимодействий в природе реализуются и другие виды взаимодействий. В частности, такими взаимодействиями, не зависящими от электрического заряда e, являются сильные ядерные взаимодействия. Казалось естественным допустить, что ядерное взаимодействие можно связать с наличием у нуклонов особого нуклонного заряда g. При этом ядерное взаимодействие можно попытаться описать по аналогии с взаимодействием электрических зарядов, введя представление о поле ядерных сил. Это поле должно описываться некоторым потенциалом, подобным потенциалу φ электрического поля. Была сделана попытка отказаться от трактовки уравнения Клейна — Гордона — Фока как уравнения для волновой функции одной частицы. Вместо этого функцию ψ было предложено рассматривать как потенциал ядерного поля, создаваемого нуклонами. Подобно тому как фотоны являются квантовыми частицами, отвечающими электромагнитному полю, так и ядерному полю отвечают π-мезоны.

В § 67 мы останавливались уже на наглядной трактовке обмена π-мезонами и фотонами как источника соответственно сильного нуклонного и электрического взаимодействия.

Проводя эту аналогию дальше, мы можем перейти к написанию уравнения для потенциала ядерного поля. В качестве такого уравнения возьмем уравнение Клейна — Гордона — Фока в виде

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \varkappa^2\psi = 0, \qquad (112,1)$$

$$\varkappa^2 = \frac{m^2c^2}{\hbar^2},$$

где m — масса π — мезона.

Мы не будем рассматривать квантовой теории ядерных сил, в которой мезоны являются элементарными возбуждениями некоторого поля, подобно фотонам в квантовой теории электромагнитного поля.

Поскольку нас интересует лишь качественная сторона дела, мы проведем рассуждения по аналогии с классической теорией электростатического поля. Считая ядерное поле не зависящим от времени, напишем для его потенциала ψ уравнение

$$\Delta\psi - \varkappa^2\psi = 0. \qquad (112,2)$$

Это уравнение является некоторым аналогом уравнения электростатического поля и переходит в последнее при $m \to 0$ (см. ниже). При наличии точечных зарядов, как известно, уравнение электростатического поля имеет вид

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\boldsymbol{r}).$$

Поэтому при наличии нуклона в точке $\boldsymbol{r} = 0$ естественно придать уравнению (112,2) вид

$$\Delta\psi - \varkappa^2\psi = -4\pi g\delta(\boldsymbol{r}). \qquad (112,3)$$

Найдем решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $\psi \to 0$ при $r \to \infty$.

Будем пытаться искать ψ в виде

$$\psi(r) = \int \psi_k e^{i\boldsymbol{kr}}\, d\boldsymbol{k}.$$

Тогда, используя разложение дельта-функции в интеграл Фурье (см. приложение III т. I) и уравнение (112,3), находим для ψ_k значение

$$\psi_k = \frac{g}{2\pi^2} \frac{1}{k^2 + \varkappa^2}.$$

Для поля ψ получаем выражение, которое удобно записать в виде

$$\psi = \frac{g}{2\pi^2} \int \frac{e^{ikr\cos\theta} k^2\, dk}{k^2 + \varkappa^2} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Интегрирование по углам φ и θ дает:

$$\psi = \frac{2g}{\pi r} \int_0^\infty \frac{k \sin kr}{k^2 + \varkappa^2} dk. \tag{112,4}$$

При интегрировании этого выражения удобно ввести пределы интегрирования по k от $(-\infty)$ до $(+\infty)$. Имеем в этом случае

$$\psi = \frac{g}{\pi i r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k e^{ikr}}{k^2 + \varkappa^2} dk.$$

Последний интеграл легко вычисляется при помощи теории вычетов.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k e^{ikr}}{k^2 + \varkappa^2} dk = 2\pi i \operatorname{Res}(k = i\varkappa) = \pi i e^{-\varkappa r},$$

откуда получаем выражение для потенциала ядерного поля

$$\psi = \frac{g}{r} e^{-\varkappa r}, \tag{112,5}$$

именуемое потенциалом Юкавы.

Формула (112,5) показывает, что потенциал ядерных сил экспоненциально спадает с расстоянием. Эффективная область, в которой ψ отлична от нуля, имеет размер

$$R \approx \frac{1}{\varkappa} = \frac{\hbar}{mc}.$$

Размер этой области по порядку величины совпадает с радиусом действия ядерных сил, определенным из опыта.

Для $m = 0$ потенциал ψ переходит в потенциал электростатического поля

$$\psi = \frac{g}{r}.$$

Таким образом, величина g действительно играет в потенциале Юкавы такую же роль, как заряд e в электростатическом потенциале, и с полным правом может быть названа нуклонным зарядом. Следует подчеркнуть, что проведенный расчет отнюдь не может претендовать на количественную характеристику поля ядерных сил.

В действительности взаимодействие между нуклонами не носит статического характера. Для корректного рассмотрения процессов виртуального обмена π-мезонами необходимо проквантовать π-мезонное поле ψ, определяемое уравнением Клейна — Гордона — Фока. Это значит, что функцию ψ и сопряженную ей функцию ψ^+ нужно рассматривать как квантовомеханические операторы в пространстве чисел заполнения. Эти операторы имеют отличные от нуля матричные элементы для процессов поглощения и испускания π-мезонов. Взаимодействие между нуклонами должно рассчитываться приемами, аналогичными тем, которые применяются в теории излучения. Мы видели в гл. XII, что расчетный аппарат теории излучения основан на применении теории возмущений. В качестве малого параметра фигурирует безразмерная константа взаимодействия $e^2/\hbar c$, составленная из заряда частицы и мировых постоянных $\hbar$ и c. Сильное ядерное взаимодействие также можно характеризовать константой взаимодействия $g^2/\hbar c$. Однако и в этом существенное отличие от электромагнитного взаимодействия, величина $g^2/\hbar c$ имеет порядок десяти. Таким образом, эффективность ядерного взаимодействия в тысячу с лишним раз выше электромагнитного. С этим связано наименование «сильное ядерное взаимодействие». Большая величина константы взаимодействия $g^2/\hbar c$, делает невозможным применение к расчету ядерных взаимодействий аппарата теории возмущений.

Это обстоятельство отражает изменение физической природы взаимодействия при переходе от заряженных частиц к нуклонам. Малость константы электромагнитного взаимодействия означала, что вероятность излучения в одном акте N частиц была пропорциональна $\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^N \ll 1$. Иными словами, вероятность испускания одного (актуального или виртуального) фотона существенно больше, чем вероятность одновременного испускания двух трех и т. д. фотонов.

Иначе дело обстоит в случае сильного ядерного взаимодействия. Вероятность одновременного испускания большого числа мезонов имеет тот же порядок величины, что и вероятность испускания одного мезона.

Поэтому каждый нуклон должен рассматриваться как частица, окруженная облаком виртуальных π-мезонов.

Правильность такой картины подтверждается явлениями множественного образования π-мезонов при столкновениях нуклонов большой энергии.

Таким образом, картина π-мезонного взаимодействия нуклонов оказывается гораздо более сложной, чем фотонного взаимодействия зарядов. Взаимодействие между двумя нуклонами непременно включает в себя множество π-мезонов и его рассмотрение должно быть основано на решении задачи многих тел. Последовательная количественная теория сильного ядерного взаимодействия до настоящего времени не разработана.

§ 113. Уравнение Дирака

В предыдущих параграфах было рассмотрено релятивистски инвариантное волновое уравнение, справедливое для частиц со спином 0. Мы видели при этом, что величина ρ/e, которую следовало бы трактовать как плотность вероятности, принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Это обстоятельство, как видно из формулы (111,3), связано с тем, что значение ρ/e определяется не только начальным значением ψ-функции, но и начальным значением производной $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, задаваемым по произволу. Ясно, что для устранения этой трудности необходимо устранить возможность произвольного выбора производной $\frac{\partial\psi}{\partial t}$. Иными словами, необходимо, чтобы искомое релятивистское обобщение уравнения Шредингера содержало лишь первую производную по времени, как и само уравнение Шредингера. Поскольку, однако, во все релятивистские инвариантные выражения координаты и время должны входить одинаковым образом, то в релятивистское обобщение уравнения Шредингера должны входить первые производные по координатам.

Принцип суперпозиции требует, чтобы релятивистское волновое уравнение было линейным. На основе этих соображений для описания движения свободной частицы Дираком было сформулировано следующее уравнение:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(\beta'_x\frac{\partial}{\partial x}+\beta'_y\frac{\partial}{\partial y}+\beta'_z\frac{\partial}{\partial z}+\beta_0\right)\psi. \tag{113,1}$$

Выражение (113,1) представляет наиболее общую линейную форму, содержащую только первые производные от искомой функции. Это уравнение удобно переписать в несколько другой форме, переопределив величины β'. Именно, напишем его в форме

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=(\hat{\beta}_x\hat{p}_x+\hat{\beta}_y\hat{p}_y+\hat{\beta}_z\hat{p}_z+\hat{\beta}_0)\psi,$$