Правильность такой картины подтверждается явлениями множественного образования π-мезонов при столкновениях нуклонов большой энергии.

Таким образом, картина π-мезонного взаимодействия нуклонов оказывается гораздо более сложной, чем фотонного взаимодействия зарядов. Взаимодействие между двумя нуклонами непременно включает в себя множество π-мезонов и его рассмотрение должно быть основано на решении задачи многих тел. Последовательная количественная теория сильного ядерного взаимодействия до настоящего времени не разработана.

§ 113. Уравнение Дирака

В предыдущих параграфах было рассмотрено релятивистски инвариантное волновое уравнение, справедливое для частиц со спином 0. Мы видели при этом, что величина ρ/e, которую следовало бы трактовать как плотность вероятности, принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Это обстоятельство, как видно из формулы (111,3), связано с тем, что значение ρ/e определяется не только начальным значением ψ-функции, но и начальным значением производной $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, задаваемым по произволу. Ясно, что для устранения этой трудности необходимо устранить возможность произвольного выбора производной $\frac{\partial\psi}{\partial t}$. Иными словами, необходимо, чтобы искомое релятивистское обобщение уравнения Шредингера содержало лишь первую производную по времени, как и само уравнение Шредингера. Поскольку, однако, во все релятивистские инвариантные выражения координаты и время должны входить одинаковым образом, то в релятивистское обобщение уравнения Шредингера должны входить первые производные по координатам.

Принцип суперпозиции требует, чтобы релятивистское волновое уравнение было линейным. На основе этих соображений для описания движения свободной частицы Дираком было сформулировано следующее уравнение:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(\beta'_x\frac{\partial}{\partial x}+\beta'_y\frac{\partial}{\partial y}+\beta'_z\frac{\partial}{\partial z}+\beta_0\right)\psi. \qquad (113,1)$$

Выражение (113,1) представляет наиболее общую линейную форму, содержащую только первые производные от искомой функции. Это уравнение удобно переписать в несколько другой форме, переопределив величины β'. Именно, напишем его в форме

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=(\hat{\beta}_x\hat{p}_x+\hat{\beta}_y\hat{p}_y+\hat{\beta}_z\hat{p}_z+\hat{\beta}_0)\psi,$$

где операторы $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$ — обычные операторы проекций импульса на оси координат, а операторы $\hat{\beta}_x$, $\hat{\beta}_y$, $\hat{\beta}_z$, $\hat{\beta}_0$ не содержат координат. Свойства этих операторов определим из дальнейших рассуждений. Вводя обозначение

$$\hat{H} = \hat{\beta}_x \hat{p}_x + \hat{\beta}_y \hat{p}_y + \hat{\beta}_z \hat{p}_z + \hat{\beta}_0,$$

можно записать уравнение (113,1) в форме

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \tag{113,2}$$

имеющей полное, хотя пока формальное, сходство с уравнением Шредингера.

Если предположить, что оператор $\hat{H}$ действительно представляет оператор Гамильтона, то между $\hat{H}$ и операторами импульса должна существовать такая же связь, как между энергией и импульсом в теории относительности, т. е.

$$\hat{H}^2 = c^2\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2\right) + m^2c^4. \tag{113,3}$$

Последнее требование позволяет определить операторы $\hat{\beta}_x$, $\hat{\beta}_y$, $\hat{\beta}_z$, $\hat{\beta}_0$. Действительно, возводя оператор $\hat{H}$ в квадрат, мы получим:

$$\hat{H}^2 = \hat{\beta}_x^2 \hat{p}_x^2 + \hat{\beta}_y^2 \hat{p}_y^2 + \hat{\beta}_z^2 \hat{p}_z^2 + \hat{\beta}_0^2 + \left(\hat{\beta}_x\hat{\beta}_y + \hat{\beta}_y\hat{\beta}_x\right)\hat{p}_x\hat{p}_y + \left(\hat{\beta}_x\hat{\beta}_z + \hat{\beta}_z\hat{\beta}_x\right)\hat{p}_x\hat{p}_z +$$
$$+ \left(\hat{\beta}_x\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_0\hat{\beta}_x\right)\hat{p}_x + \left(\hat{\beta}_y\hat{\beta}_z + \hat{\beta}_z\hat{\beta}_y\right)\hat{p}_z\hat{p}_y + \left(\hat{\beta}_y\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_0\hat{\beta}_y\right)\hat{p}_y +$$
$$+ \left(\hat{\beta}_z\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_0\hat{\beta}_z\right)\hat{p}_z. \tag{113,4}$$

Оператор $\hat{H}^2$ будет иметь вид (113,3), если выполняются соотношения

$$\hat{\beta}_x^2 = \hat{\beta}_y^2 = \hat{\beta}_z^2 = c^2,$$
$$\hat{\beta}_0^2 = m^2c^4,$$
$$\hat{\beta}_i\hat{\beta}_k + \hat{\beta}_k\hat{\beta}_i = 0, \quad i \neq k, \quad \hat{\beta}_i\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_0\hat{\beta}_i = 0.$$

Здесь i принимает значения x, y, z.

Обычно вместо операторов β_i вводят операторы α_i, которые отличаются от них постоянными множителями:

$$\hat{\beta}_x = c\alpha_x; \quad \hat{\beta}_y = c\alpha_y; \quad \hat{\beta}_z = c\alpha_z; \quad \hat{\beta}_0 = mc^2\beta;$$

для операторов α и β имеют место очевидные равенства

$$\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = 1, \quad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0,$$
$$\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k. \tag{113,5}$$

С помощью введенных операторов уравнение (113,1) может быть записано в виде

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = [c(\alpha_x\hat{p}_x + \alpha_y\hat{p}_y + \alpha_z\hat{p}_z) + mc^2\beta]\,\psi. \qquad (113,6)$$

Последнее уравнение называется уравнением Дирака.

Если ввести векторный оператор равенством

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_x\boldsymbol{i} + \alpha_y\boldsymbol{j} + \alpha_z\boldsymbol{k},$$

то уравнение Дирака запишется в еще более компактном виде

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi,$$

$$\hat{H} = c\boldsymbol{\alpha}\hat{\boldsymbol{p}} + mc^2\beta. \qquad (113,7)$$

Перейдем теперь к нахождению явного вида операторов α_x, α_y, α_z, β. Заметим прежде всего, что действия этих операторов не могут сводиться к умножению волновой функции на некоторые постоянные числа. С помощью операторов, сводящихся к постоянным числам, невозможно было бы удовлетворить соотношениям (113,5).

Попробуем искать операторы α_x, α_y, α_z, β в виде совокупности постоянных, вообще говоря комплексных чисел, т. е. в виде квадратных матриц вида

$$\alpha_x = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Определим прежде всего число n, которое будем считать одинаковым для матриц α и β. Для этого сопоставим матрицам α и β детерминанты

$$\det\alpha_x = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Прежде чем перейти к дальнейшему исследованию матриц, заметим, что для детерминанта от произведения матриц должно выполняться следующее соотношение:

$$\det\alpha_x\beta = \det\alpha_x\det\beta. \qquad (113,8)$$

Из правил коммутаций следует далее

$$\alpha_x\beta = -\beta\alpha_x = -I\beta\alpha_x.$$

Здесь I — единичная матрица. Используя затем соотношение (113,8), находим:

$$\det \alpha_x\beta = \det \alpha_x \det \beta = \det(-I) \det \beta \det \alpha_x.$$

Поскольку детерминанты являются обычными числами, отсюда получаем, что

$$\det(-I) = 1$$

и, следовательно,

$$(-1)^n = 1. \tag{113,9}$$

Таким образом, число n должно быть четным. Если бы число n было равно двум, то искомые матрицы были бы двухрядными. С двухрядными матрицами мы встречались уже в § 59. Там было показано, что существуют четыре линейно независимые двухрядные числовые матрицы: три матрицы Паули и единичная матрица. Последняя коммутирует со всеми матрицами Паули и, следовательно, не удовлетворяет условиям антикоммутации (113,5). Наоборот, в случае четырехрядных матриц оказывается возможным построить матрицы с требуемыми свойствами. Именно, простой проверкой можно убедиться, что матрицы

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad
\alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&\alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad
\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{113,10}$$

удовлетворяют всем сформулированным требованиям. Матрицы (113,10) можно записать в более сокращенном виде, используя матрицы Паули. Действительно, из определения (60,14), (60,15) и (113,10) ясны соотношения

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \\
&\alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}\right\} \tag{113,11}$$

Матрицы α, β являются эрмитовыми матрицами. Это можно установить простой проверкой. Если мы транспонируем матрицы и проведем комплексное сопряжение, то полученные матрицы совпадут с первоначальными. Поэтому для этих матриц можно написать $\alpha_x^+ = \alpha_x$; $\alpha_y^+ = \alpha_y$; $\alpha_z^+ = \alpha_z$; $\beta^+ = \beta$.

Если бы вместо четырехрядных матриц мы ввели матрицы более высокого ранга, то формальная схема теории не была бы нарушена. Однако, как будет ясно из дальнейшего, именно при введении четырехрядных матриц общее уравнение Дирака описывает свойства частиц со спином 1/2.

Приняв для α_x, α_y, α_z, β матричное выражение (113,10) в виде четырехрядных матриц, мы должны приписать волновой функции ψ четыре компоненты. Действительно, только в этом случае четыре уравнения, на которые распадается общее выражение (113,7) при подстановке в него четырехрядных матриц, содержит четыре неизвестные функции. Четырехкомпонентную функцию ψ (именуемую биспинором Дирака) можно записать в виде матрицы

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}.$$

Выпишем эти уравнения в явном виде, пользуясь правилом умножения матриц (см. (45,6)):

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = c(\hat{p}_x - i\hat{p}_y)\psi_4 + c\hat{p}_z\psi_3 + mc^2\psi_1,$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = c(\hat{p}_x + i\hat{p}_y)\psi_3 - c\hat{p}_z\psi_4 + mc^2\psi_2,$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_3}{\partial t} = c(\hat{p}_x - i\hat{p}_y)\psi_2 + c\hat{p}_z\psi_1 - mc^2\psi_3,$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_4}{\partial t} = c(\hat{p}_x + i\hat{p}_y)\psi_1 - c\hat{p}_z\psi_2 - mc^2\psi_4.$$

Не представляет труда обобщить уравнение Дирака на случай движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Именно, заменяя по обычной схеме оператор импульса $\hat{\boldsymbol{p}}$ на оператор $\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}$ и прибавляя к оператору $\hat{H}$ оператор $e\varphi$, где $\boldsymbol{A}$ и φ — векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля, получим уравнение Дирака

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[c\alpha\left(p - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) + e\varphi + mc^2\beta\right]\psi. \qquad (113,12)$$

Преобразуем еще уравнение Дирака к другой более простой и симметричной форме.

Умножим уравнение Дирака (113,7) слева на оператор β

$$i\hbar\beta\frac{\partial\psi}{\partial t}=(c\beta\alpha p+mc^2\beta^2)\psi \tag{113,13}$$

и введем следующую систему матриц:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1&=-i\beta\alpha_x,\\ \gamma_2&=-i\beta\alpha_y,\\ \gamma_3&=-i\beta\alpha_z,\\ \gamma_4&=+\beta.\end{aligned}\right\} \tag{113,14}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что матрицы γ_i удовлетворяют тем же правилам коммутации, что и матрицы α и β, т. е. $\gamma_i\gamma_k+\gamma_k\gamma_i=2\delta_{ik}$. С помощью матриц γ_i можно записать уравнение Дирака в виде

$$\sum_{i=1}^{3}\gamma_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\frac{mc}{\hbar}\psi+\frac{\gamma_4}{ic}\frac{\partial\psi}{\partial t}=0. \tag{113,15}$$

Введем четвертую координату, $x_4=ict$, и запишем окончательно уравнение Дирака в весьма симметричной форме:

$$\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}+\frac{mc}{\hbar}\psi=0, \tag{113,16}$$

где по μ производится суммирование. Вводя оператор $\hat{p}_\mu=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ и 4-потенциал A_μ (см. § 19 ч. III), можно представить (113,12) в виде

$$\left[\gamma_\mu\left(\hat{p}_\mu-\frac{e}{c}A_\mu\right)-imc\right]\psi=0. \tag{113,17}$$

§ 114. Плотность вероятности и поток вероятности в теории Дирака

Покажем прежде всего, что трудность с интерпретацией плотности вероятности ρ/e, с которой мы столкнулись при обсуждении уравнения Клейна — Гордона — Фока, отсутствует в уравнении Дирака. Следуя обычной схеме, напишем, кроме уравнения Дирака

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=(-i\hbar c\alpha\nabla+mc^2\beta)\psi, \tag{114,1}$$

сопряженное ему уравнение

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^+}{\partial t}=i\hbar c\,\nabla\psi^+\alpha^++mc^2\psi^+\beta^+. \tag{114,2}$$