Преобразуем еще уравнение Дирака к другой более простой и симметричной форме.

Умножим уравнение Дирака (113,7) слева на оператор β

$$i\hbar\beta\frac{\partial\psi}{\partial t}=(c\beta\alpha p+mc^2\beta^2)\psi \qquad (113,13)$$

и введем следующую систему матриц:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1&=-i\beta\alpha_x,\\ \gamma_2&=-i\beta\alpha_y,\\ \gamma_3&=-i\beta\alpha_z,\\ \gamma_4&=+\beta.\end{aligned}\right\} \qquad (113,14)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что матрицы γ_i удовлетворяют тем же правилам коммутации, что и матрицы α и β, т. е. $\gamma_i\gamma_k+\gamma_k\gamma_i=2\delta_{ik}$. С помощью матриц γ_i можно записать уравнение Дирака в виде

$$\sum_{i=1}^{3}\gamma_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\frac{mc}{\hbar}\psi+\frac{\gamma_4}{ic}\frac{\partial\psi}{\partial t}=0. \qquad (113,15)$$

Введем четвертую координату, $x_4=ict$, и запишем окончательно уравнение Дирака в весьма симметричной форме:

$$\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}+\frac{mc}{\hbar}\psi=0, \qquad (113,16)$$

где по μ производится суммирование. Вводя оператор $\hat{p}_\mu=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ и 4-потенциал A_μ (см. § 19 ч. III), можно представить (113,12) в виде

$$\left[\gamma_\mu\left(\hat{p}_\mu-\frac{e}{c}A_\mu\right)-imc\right]\psi=0. \qquad (113,17)$$

§ 114. Плотность вероятности и поток вероятности в теории Дирака

Покажем прежде всего, что трудность с интерпретацией плотности вероятности ρ/e, с которой мы столкнулись при обсуждении уравнения Клейна — Гордона — Фока, отсутствует в уравнении Дирака. Следуя обычной схеме, напишем, кроме уравнения Дирака

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=(-i\hbar c\alpha\nabla+mc^2\beta)\psi, \qquad (114,1)$$

сопряженное ему уравнение

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^+}{\partial t}=i\hbar c\nabla\psi^+\alpha^++mc^2\psi^+\beta^+. \qquad (114,2)$$

При этом мы воспользовались правилом сопряжения произведения матриц

$$(ab)^+ = b^+ a^+.$$

Так как операторы α и β эрмитовы, то $\alpha^+ = \alpha$, $\beta^+ = \beta$, и мы получаем

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^+}{\partial t} = i\hbar c \nabla \psi^+ \alpha + mc^2 \psi^+ \beta. \qquad (114,3)$$

Уравнение (114,1) умножим на ψ^+ слева, а уравнение (114,3) на ψ справа и вычтем из первого уравнения второе. Имеем:

$$i\hbar \left(\psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi \right) = -i\hbar c \left[\psi^+ \alpha \nabla \psi + \left(\nabla \psi^+ \alpha \right) \psi \right]. \qquad (114,4)$$

Круглая скобка в правой части уравнения (114,4) означает, что градиент действует только на функцию ψ^+. Выражение, стоящее в квадратных скобках, может быть легко преобразовано с помощью формулы

$$\psi^+ (\alpha \nabla) \psi + \left(\nabla \psi^+ \alpha \right) \psi = \psi^+ \operatorname{div} \alpha \psi + \left(\nabla \psi^+ \alpha \right) \psi = \operatorname{div} \psi^+ \alpha \psi.$$

Тогда уравнение (114,4) запишется в виде

$$\frac{\partial \psi^+ \psi}{\partial t} = -c \operatorname{div} \psi^+ \alpha \psi. \qquad (114,5)$$

Сравнивая полученное выражение с общей формулой (7,5), мы видим, что существенно положительная величина $\psi^+\psi = \overset{*}{\psi}_1 \psi_1 + \overset{*}{\psi}_2 \psi_2 + \overset{*}{\psi}_3 \psi_3 + \overset{*}{\psi}_4 \psi_4$ представляет собой плотность вероятности. Вектор, определяемый равенством $j = c\psi^+ \alpha \psi$, дает плотность потока вероятности для частицы с волновой функцией ψ.

Таким образом, как и в теории Шредингера, волновая функция допускает обычную вероятностную интерпретацию. Из линейности уравнения Дирака и вероятностной интерпретации функции ψ вытекает, что остаются в силе основные положения квантовой механики: 1) интерпретация величины $|c_m(t)|^2$, где $c_m(t)$ — коэффициент разложения

$$\psi = \sum_m c_m \psi_m$$

и ψ_m — собственная функция некоторого оператора, как вероятности измерения собственного значения, 2) определение среднего значения

$$\overline{L} = \int \psi^+ \hat{L} \psi \, dV.$$

Следовательно, остается справедливой и вся схема построения квантовой механики.