§ 115. Решение уравнения Дирака для свободной частицы

В качестве простейшего примера решения уравнения Дирака рассмотрим движение свободной частицы. Решение уравнения Дирака для свободно движущейся частицы

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (c\alpha\hat{p} + mc^2\beta)\,\psi \tag{115,1}$$

будем пытаться искать обычным путем. Подставляя волновую функцию $\psi = \psi_0 e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ в (115,1), получаем уравнение для волновой функции ψ_0, не зависящей от времени:

$$E\psi_0 = (c\alpha\hat{p} + mc^2\beta)\,\psi_0. \tag{115,2}$$

Будем далее рассматривать состояния с определенным импульсом и пытаться искать решение уравнения (115,2) в виде плоской волны

$$\psi_0 = ue^{\frac{i\mathbf{pr}}{\hbar}}.$$

Тогда для функции u получим уравнение

$$Eu = (c\alpha\mathbf{p} + mc^2\beta)\,u. \tag{115,3}$$

Подставим u в виде

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}, \qquad \left.\begin{aligned} w &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\ w' &= \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{115,4}$$

Подставляя (115,4) в (115,3) и учитывая представления матриц α и β (113,11), находим

$$Ew = c\sigma\mathbf{p}w' + mc^2 w, \tag{115,5}$$

$$Ew' = c\sigma\mathbf{p}w - mc^2 w'. \tag{115,6}$$

Каждая из функций w и w' имеет две компоненты.

Для того чтобы полученная система линейных уравнений имела решение, необходимо, чтобы ее детерминант обращался в нуль:

$$\begin{vmatrix} E - mc^2 & -c\sigma\mathbf{p} \\ -c\sigma\mathbf{p} & E + mc^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{115,7}$$

Раскрывая определитель, получаем

$$E^2 - m^2c^4 = +\,c^2(\sigma\mathbf{p})^2.$$

Выражение $(\sigma p)^2$ легко может быть преобразовано с помощью известных свойств матриц Паули. Согласно (60,17) имеем

$$(\sigma p)^2 = p^2. \tag{115,8}$$

Как и следовало ожидать, мы приходим к известному соотношению между энергией и импульсом частицы

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4. \tag{115,9}$$

Энергия частицы может принимать как положительное, так и отрицательное значение. В теории относительности мы обсуждали уже этот вопрос и видели, что в рамках классической механики это обстоятельство не создавало никаких трудностей, поскольку область энергий шириной $2mc^2$ является запрещенной. Действительно, в классической механике все переменные изменяются непрерывно и частица имеет положительную либо отрицательную энергию. Непрерывный переход из одной области в другую невозможен.

В релятивистской квантовой механике нет каких-либо оснований отбросить отрицательный знак. Несколько ниже мы подробно обсудим смысл отрицательного знака энергии.

Выбирая в выражении для энергии знак плюс или знак минус, мы можем разрешить систему уравнений (115,5) и (115,6). При этом ввиду однородности системы уравнений одна из величин, либо w, либо w', остается произвольной.

Пусть w — величина произвольная. Тогда

$$w' = \frac{c\sigma p}{E + mc^2} w. \tag{115,10}$$

Если, наоборот, произвольной принимается величина w', то имеем:

$$w = \frac{c\sigma p}{E - mc^2} w'. \tag{115,11}$$

Соответствующие волновые функции имеют вид (при этом направление вектора импульса принято для простоты за ось z):

$$u = \begin{pmatrix} A \\ B \\ \dfrac{cp_zA}{E+mc^2} \\ -\dfrac{cp_zB}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \dfrac{cp_zD}{E-mc^2} \\ \dfrac{cp_zF}{E-mc^2} \\ D \\ F \end{pmatrix}. \tag{115,12}$$

Здесь A, B, D, F — произвольные постоянные. Характер найденных выражений становится более ясным, если перейти к нерелятивистскому пределу, положив $E \sim mc^2$ или $E \sim -mc^2$

соответственно. Тогда из (115,10) видно, что в первом случае

$$w' = \frac{c\sigma p}{mc^2} w \sim \frac{v}{c} w.$$

Спинор w' меньше w в отношении v/c, так что

$$u \approx \begin{pmatrix} A \\ B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При отрицательном значении энергии (115,11) дает

$$w \approx -\frac{c\sigma p w'}{2mc^2} \approx -\frac{v}{c} w'$$

и

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D \\ F \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при переходе к нерелятивистскому приближению две компоненты волновой функции оказываются малыми по сравнению с двумя другими компонентами. При этом для положительных энергий w велико по сравнению с w', при отрицательных — наоборот. Общее решение уравнения Дирака для движения свободной частицы можно написать в виде суперпозиции волновых функций типа (115,12), т. е. в виде интеграла Фурье вида

$$\psi(x, y, z, t) = \int u(A, B) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{\frac{ipr}{\hbar}} dp + \int v(D, F) e^{+\frac{i|E|t}{\hbar}} e^{\frac{ipr}{\hbar}} dp,$$

где

$$dp = dp_x \, dp_y \, dp_z.$$

Если в начальный момент $t = 0$ задана волновая функция

$$\psi(x, y, z, 0) = \int \varphi(p) e^{\frac{ipr}{\hbar}} dp; \quad \varphi(p) = \begin{pmatrix} \varphi_1(p) \\ \varphi_2(p) \\ \varphi_3(p) \\ \varphi_4(p) \end{pmatrix},$$

то через четыре произвольных коэффициента, входящих в u и v, можно однозначно определить заданную совокупность величин φ_1, φ_2, φ_3 и φ_4.

Таким образом, совокупность двух волн, одна из которых отвечает положительной энергии, а вторая — отрицательной, образуют полное решение уравнения Дирака. Совершенно ясно, что если бы частное решение, отвечающее отрицательной энергии, было отброшено и удержано только решение с положительной энергией, то найденная при этом система функций была неполной.

Начальные условия содержат четыре заданные величины, тогда как в u входят только две неопределенные постоянные A и B. Таким образом, независимо от других соображений необходимость учета решений с отрицательной энергией вытекает из общих основ квантовой механики.

В следующем параграфе мы вернемся к обсуждению тех фундаментальных выводов, которые были сделаны из существования решений уравнения Дирака, отвечающих отрицательной энергии частиц.

§ 116. Понятие о позитроне

Мы перейдем теперь к обсуждению формулы

$$E = \pm \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}. \qquad (116,1)$$

Как указывалось выше, отрицательная энергия свободной частицы с точки зрения классической механики не имеет физического смысла.

В квантовой механике ситуация изменяется. Именно в квантовой механике возможны скачкообразные переходы из состояния с положительной энергией в состояние с отрицательной энергией. Иными словами, оба класса состояний уже не разделены непроходимым барьером. Мы уже видели, что исключение состояний с отрицательной энергией противоречит общим положениям квантовой механики, так как волновые функции состояний с положительной энергией не образуют полную систему функций.

С другой стороны, невозможно допустить существование частиц с отрицательной энергией. Подобные частицы обладали бы такими свойствами, которые принципиально отличаются от свойств всех наблюдавшихся в природе частиц. В виде примера можно указать на следующее: частица с отрицательной энергией $-|E_1|$ могла бы переходить в состояние с меньшей отрицательной энергией $-|E_2|$, $|E_2| > |E_1|$. При этом разность $|E_2| - |E_1|$ могла бы превращаться в полезную работу. Такой переход мог бы совершаться непрерывно, поскольку $|E_2|$ ничем не ограничено и частица с отрицательной энергией могла бы служить бесконечно большим источником работы.

Чтобы избежать трудностей, связанных с введением в теорию наблюдаемых частиц с отрицательной энергией, Дирак ввел понятие вакуума как такого состояния пространства, в котором