

образуют полное решение уравнения Дирака. Совершенно ясно, что если бы частное решение, отвечающее отрицательной энергии, было отброшено и удержано только решение с положительной энергией, то найденная при этом система функций была неполной.

Начальные условия содержат четыре заданные величины, тогда как в u входят только две неопределенные постоянные A и B . Таким образом, независимо от других соображений необходимость учета решений с отрицательной энергией вытекает из общих основ квантовой механики.

В следующем параграфе мы вернемся к обсуждению тех фундаментальных выводов, которые были сделаны из существования решений уравнения Дирака, отвечающих отрицательной энергии частиц.

§ 116. Понятие о позитроне

Мы перейдем теперь к обсуждению формулы

$$E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (116,1)$$

Как указывалось выше, отрицательная энергия свободной частицы с точки зрения классической механики не имеет физического смысла.

В квантовой механике ситуация изменяется. Именно в квантовой механике возможны скачкообразные переходы из состояния с положительной энергией в состояние с отрицательной энергией. Иными словами, оба класса состояний уже не разделены непроходимым барьером. Мы уже видели, что исключение состояний с отрицательной энергией противоречит общим положениям квантовой механики, так как волновые функции состояний с положительной энергией не образуют полную систему функций.

С другой стороны, невозможно допустить существование частиц с отрицательной энергией. Подобные частицы обладали бы такими свойствами, которые принципиально отличаются от свойств всех наблюдавшихся в природе частиц. В виде примера можно указать на следующее: частица с отрицательной энергией $-|E_1|$ могла бы переходить в состояние с меньшей отрицательной энергией $-|E_2|$, $|E_2| > |E_1|$. При этом разность $|E_2| - |E_1|$ могла бы превращаться в полезную работу. Такой переход мог бы совершаться непрерывно, поскольку $|E_2|$ ничем не ограничено и частица с отрицательной энергией могла бы служить бесконечно большим источником работы.

Чтобы избежать трудностей, связанных с введением в теорию наблюдаемых частиц с отрицательной энергией, Дирак ввел понятие вакуума как такого состояния пространства, в котором

все состояния с отрицательной энергией заняты электронами, а все состояния с положительной энергией свободны. В каждом состоянии с отрицательной энергией, согласно принципу Паули, находится один электрон.

Предположим далее, что под влиянием внешних воздействий один из электронов удален из состояния с отрицательной энергией. Освободившееся состояние с отрицательной энергией проявляется как «ничто» с положительной энергией, так как для уничтожения такого состояния, т. е. для его заполнения необходимо добавить к нему электрон с отрицательной энергией. Таким образом, незаполненное состояние с отрицательной энергией следует трактовать как частицу, имеющую положительную энергию.

Следует заметить, что Дирак вначале ошибочно сопоставлял это состояние с протоном. Позднее было теоретически показано, что частица, соответствующая незаполненному состоянию с отрицательной энергией, должна иметь массу, равную массе электрона и, следовательно, она не может быть протоном.

Рассмотрим соображения Дирака о заполненном фоне отрицательных энергий более подробно. Пусть $N_{\alpha}^{(-)}(p)$ и $N_{\alpha}^{(+)}(p)$ означают числа электронов, находящихся соответственно в состояниях с отрицательной и положительной энергией и имеющих импульс p . Индекс α может принимать два значения в соответствии с направлением спина. Эти числа, в согласии с принципом Паули, могут принимать значения только 0 или 1. В состоянии вакуума (индекс v) мы имеем

$$N_{\alpha v}^{(-)}(p) = 1, \quad N_{\alpha v}^{(+)}(p) = 0$$

при всех значениях импульса.

Действительно, все состояния с отрицательной энергией при этом заняты, а все состояния с положительной — свободны. При этом энергия E_v и заряд q_v в вакууме определяется соотношениями

$$E_v = - \sum_{\alpha, p} E(p) N_{\alpha v}^{(-)}(p), \quad (116,2)$$

$$q_v = - |e| \sum_{\alpha, p} N_{\alpha v}^{(-)}(p). \quad (116,3)$$

Здесь e — заряд электрона.

Так как импульс и энергия свободных частиц ничем не ограничены, значения E_v и q_v бесконечно велики. Однако согласно Дираку эти величины принципиально не наблюдаемы. Наблюдаемыми являются лишь такие величины, которые характеризуют отклонение от состояния вакуума.

Напишем, далее, полную энергию E системы и заряд q системы в том случае, когда в пространстве находятся электроны

в состояниях с положительной энергией, а в состояниях с отрицательной энергией имеются свободные места

$$E = \sum_{\alpha, p} [N_{\alpha}^{+}(p) - N_{\alpha}^{(-)}(p)] E(p), \quad (116,4)$$

$$q = - \sum_{\alpha, p} |e| [N_{\alpha}^{+}(p) + N_{\alpha}^{(-)}(p)]. \quad (116,5)$$

В соответствии со сказанным выше наблюдаемы лишь следующие разности:

$$E - E_0 = \sum_{\alpha, p} [N_{\alpha}^{+}(p) + (N_{\alpha\nu}^{(-)}(p) - N_{\alpha}^{(-)}(p))] E(p), \quad (116,6)$$

$$q - q_0 = - |e| \sum_{\alpha, p} [N_{\alpha}^{+}(p) + N_{\alpha}^{(-)}(p) - N_{\alpha\nu}^{(-)}(p)]. \quad (116,7)$$

Из формул (116,6) и (116,7) мы видим, что если некоторое состояние с отрицательной энергией свободно, т. е. $N_{\alpha}^{(-)}(p) = 0$, то оно соответствует положительному вкладу в наблюдаемые значения энергии и заряда. Действительно, в формулы (116,6) и (116,7) входят выражения $N_{\alpha\nu}^{(-)}(p) - N_{\alpha}^{(-)}(p)$. Если состояние с отрицательной энергией свободно $N_{\alpha}^{(-)}(p) = 0$, то $\{N_{\alpha\nu}^{(-)}(p) - N_{\alpha}^{(-)}(p)\} = 1$. При этом возникает положительный вклад в энергию и заряд системы, равный соответственно E_p и $|e|$. Таким образом, мы видим, что отсутствие электрона с импульсом p в сплошном фоне заполненных отрицательных состояний эквивалентно появлению наблюдаемой частицы с положительным зарядом, положительной энергией и импульсом p . Такая частица, с зарядом $(+|e|)$ и массой, равной массе электрона, была названа позитроном. Она была обнаружена Андерсеном в космических лучах через несколько лет после появления теории Дирака.

На основе представлений Дирака оказалось возможным дать объяснение ряду известных в настоящее время физических эффектов. Например, очевидно, что электромагнитное поле может образовать пару электрон — позитрон, если энергия фотона $\hbar\omega$ больше, чем $2mc^2$. Последняя энергия необходима для того, чтобы перевести электрон из состояния с отрицательной энергией в состояние с положительной энергией.

Законы сохранения энергии и импульса ограничивают возможность реакции образования пары фотоном. Фактически эта реакция может происходить только вблизи третьего тела — например ядра, принимающего на себя часть импульса. Наряду с образованием пары электрон — позитрон возможна обратная реакция — аннигиляция позитронов. При аннигиляции электрон с положительной энергией переходит в незаполненное состояние

с отрицательной энергией. Разность энергии излучается в виде γ -квантов.

Теория Дирака позволила не только предсказать эти явления, но и вычислить эффективное сечение обоих процессов. Отличное согласие результатов расчетов с опытными данными явилось хорошим подтверждением правильности представлений Дирака. Однако последнее десятилетие ознаменовалось важнейшими теоретическими и экспериментальными достижениями, которые частично будут освещены в дальнейшем. Эти успехи позволили, с одной стороны, выявить реальность существования вакуума в смысле Дирака, а с другой стороны, расширить области применимости релятивистской квантовой механики. Как уже указывалось, вакуум представляет систему заряженных частиц, заполняющих все возможные состояния. При внесении в вакуум внешнего электрического заряда или при возникновении электромагнитного поля вакуум начинает взаимодействовать с внешними полями. Например, Лэмбом в 1953 г. было обнаружено, что уровни $^2S_{1/2}$ и $^2P_{1/2}$ атома водорода имеют несколько различные энергии (лэмбовское смещение). Этот эффект может быть объяснен только взаимодействием с вакуумом (см. §§ 119 и 128).

Таким образом, развитые Дираком представления о вакууме подтверждаются рядом разнообразных экспериментов.

Симметрия теории по отношению к электронам и позитронам находит свое выражение в том, что существует унитарный оператор \hat{C} , именуемый оператором зарядового сопряжения, который преобразует частицу в античастицу. Иными словами, действие оператора \hat{C} меняет местами электрон и позитрон (с тем же самым спином и энергией).

Если обозначить через ψ_e и ψ_p волновые функции электрона и позитрона соответственно, то по определению для них можно написать (см. (113,17)):

$$\left\{ \gamma_\mu \left(\hat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) - imc \right\} \psi_e = 0, \quad (116,8)$$

$$\left\{ \gamma_\mu \left(\hat{p}_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) - imc \right\} \psi_p = 0. \quad (116,9)$$

Комплексно сопряженная к ψ_e функция ψ_e^* удовлетворяет при этом уравнению

$$\left\{ \gamma_\mu^* \left(\hat{p}_\mu^* - \frac{e}{c} A_\mu^* \right) + imc \right\} \psi_e^* = 0,$$

или, поскольку

$$\hat{p}_i^* = -\hat{p}_i, \quad A_i^* = A_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \hat{p}_4^* = \hat{p}_4, \quad A_4^* = -A_4,$$

$$\left\{ -\gamma_4^* \left(\hat{p}_4 + \frac{e}{c} A_4 \right) + \gamma_i^* \left(\hat{p}_i + \frac{e}{c} A_i \right) - imc \right\} \psi_e^* = 0. \quad (116,10)$$

На основании сравнения (116,9) и (116,10) естественно положить

$$\psi_p = \hat{C}\psi_e^*, \quad \psi_e^* = \hat{C}^{-1}\psi_p. \quad (116,11)$$

Подставляя (116,11) в (116,9), имеем

$$\left\{ \gamma_i \left(\hat{p}_i + \frac{e}{c} A_i \right) + \gamma_4 \left(\hat{p}_4 + \frac{e}{c} A_4 \right) - imc \right\} \hat{C}\psi_e^* = 0.$$

Умножая теперь слева на \hat{C}^{-1}

$$\hat{C}^{-1} \left\{ \gamma_i \left(\hat{p}_i + \frac{e}{c} A_i \right) + \gamma_4 \left(\hat{p}_4 + \frac{e}{c} A_4 \right) - imc \right\} \hat{C}\psi_e^* = 0$$

или

$$\left\{ \left(\hat{p}_i + \frac{e}{c} A_i \right) \hat{C}^{-1} \gamma_i \hat{C} + \left(\hat{p}_4 + \frac{e}{c} A_4 \right) \hat{C}^{-1} \gamma_4 \hat{C} - imc \right\} \psi_e^* = 0. \quad (116,12)$$

Для того чтобы (116,12) было тождественно (116,10), необходимо выполнение равенств

$$\hat{C}^{-1} \gamma_i \hat{C} = \gamma_i^*, \quad \hat{C}^{-1} \gamma_4 \hat{C} = -\gamma_4^* = -\gamma_4.$$

Если γ_i и γ_4 определены формулами (113,14), то

$$\hat{C} = \gamma_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Из определения (116,11) непосредственно видно, что оператор \hat{C} коммутирует с оператором Гамильтона. Таким образом, можно ввести две волновые функции ψ_e и ψ_p , совершенно равноправные и связанные между собой сохраняющимися во времени соотношениями

$$\psi_p = \hat{C}\psi_e^* = \gamma_2\psi_e^*, \quad \psi_e = \hat{C}^{-1}\psi_p^* = \gamma_2^{-1}\psi_p^*.$$

Обе волновые функции описывают частицы с одинаковой (положительной) энергией, массой и спином, но разными знаками заряда и магнитного момента. Введение зарядово-сопряженных волновых функций для равноправных частиц до известной степени снимает логические трудности, связанные с упрощенной трактовкой вакуума как фона, заполненного частицами с отрицательной энергией.