§ 117. Спин частиц, описываемых уравнением Дирака

Хотя до сих пор мы широко пользовались представлениями о спине частиц, оператор спина был введен чисто формальным образом, как необходимый прием для описания опытных фактов. Сейчас мы покажем, что существование спина непосредственно вытекает из уравнения Дирака. Для этого рассмотрим законы сохранения, следующие из уравнения Дирака.

Поскольку в теории Дирака сохраняются все общие положения квантовой механики, для отыскания законов сохранения необходимо составить коммутатор с оператором Гамильтона. Отличие от теории Шредингера заключается в том, что оператор Гамильтона имеет теперь вид (113,7).

Если оператор Гамильтона не зависит от времени (а для этого необходимо, чтобы не зависели от времени потенциалы внешнего поля), то имеет место закон сохранения энергии. В этом вопросе нет никакого различия между теорией Шредингера и теорией Дирака.

Для частицы, двигающейся в пустом пространстве, должен также сохраниться полный момент. Поэтому должен существовать оператор полного момента, коммутирующий с гамильтонианом.

Интересный результат получается при составлении коммутатора для оператора момента количества движения

$$\hat{\boldsymbol{L}} = [\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{p}}]$$

и гамильтониана.

Для наших целей следует ограничиться случаем свободной частицы. Выбирая произвольно ориентированную ось z, имеем:

$$\hat{H}\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{H} = (c\boldsymbol{\alpha}\hat{\boldsymbol{p}} + mc^2\beta)\hat{L}_z - \hat{L}_z(c\boldsymbol{\alpha}\hat{\boldsymbol{p}} + mc^2\beta).$$

Так как оператор $\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)$ коммутирует с операторами $\hat{\beta}$ и $\hat{\alpha}_z\hat{p}_z$, то получаем:

$$\hat{H}\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{H} = c\alpha_x(\hat{p}_x\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{p}_x) + c\alpha_y(\hat{p}_y\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{p}_y). \quad (117,1)$$

Используя свойства коммутаций проекций импульса с проекциями момента количества движения, находим:

$$\hat{H}\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{H} = i\hbar c(\alpha_y\hat{p}_x - \alpha_x\hat{p}_y). \quad (117,2)$$

Аналогичные результаты получаем для других проекций импульса.

Таким образом, момент количества движения не является интегралом движения и не сохраняется. Для того чтобы найти величину, играющую роль полного момента количества движения, введем оператор $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{s}}$, где $\hat{\boldsymbol{s}}$ — неизвестный оператор.

Будем требовать, чтобы оператор $\hat{J}$ коммутировал с оператором $\hat{H}$:

$$\hat{H}\hat{J}_i - \hat{J}_i\hat{H} = 0 \quad \text{или} \quad (\hat{H}\hat{L}_i - \hat{L}_i\hat{H}) + (\hat{H}\hat{s}_i - \hat{s}_i\hat{H}) = 0.$$

Подставляя $i = z$ и используя значение коммутатора (117,2), имеем

$$\hat{H}\hat{s}_z - \hat{s}_z\hat{H} = i\hbar c\,(\alpha_x\hat{p}_y - \alpha_y\hat{p}_x). \tag{117,3}$$

Попытаемся удовлетворить этому равенству, положив

$$\hat{s}_z = A\alpha_x\alpha_y, \tag{117,4}$$

где A — неизвестная константа.

Вычислим далее коммутатор

$$\hat{H}\hat{s}_z - \hat{s}_z\hat{H}.$$

Используя (113,5), получаем

$$A\hat{H}\alpha_x\alpha_y - A\alpha_x\alpha_y\hat{H} =$$
$$= Ac\,(\alpha_x\hat{p}_x + \alpha_y\hat{p}_y)\,\alpha_x\alpha_y - Ac\alpha_x\alpha_y\,(\alpha_x\hat{p}_x + \alpha_y\hat{p}_y) = 2Ac\,(\alpha_y\hat{p}_x - \alpha_x\hat{p}_y).$$

Сравнивая последнее выражение с формулой (117,3), находим значение

$$A = -\frac{i\hbar}{2}.$$

Таким образом, оператор s_z равен

$$\hat{s}_z = -\frac{i\hbar}{2}\alpha_x\alpha_y = -\frac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix} = -\frac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_x\sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_x\sigma_y \end{pmatrix} =$$
$$= -\frac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix} i\sigma_z & 0 \\ 0 & i\sigma_z \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{117,5}$$

Две другие проекции вектора $\hat{s}_x$ и $\hat{s}_y$ получается из аналогичных расчетов:

$$\hat{s}_x = -\frac{i\hbar}{2}\alpha_y\alpha_z; \qquad \hat{s}_y = -\frac{i\hbar}{2}\alpha_z\alpha_x.$$

Найдем теперь оператор $\hat{s}^2 = \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2$. Используя свойства операторов α_x, α_y, α_z, найдем:

$$\hat{s}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\hat{I} = \hbar^2\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\hat{I}. \tag{117,6}$$

Перейдем далее к обсуждению полученных результатов. Сохраняющуюся во времени величину J следует, очевидно, считать полным моментом частицы. В свою очередь полный момент является суммой орбитального и собственного, спинового момента частицы. Операторы $\hat{s}_z$ и $\hat{s}^2$ в формулах (117,5) и (117,6) приведены к диагональному виду. При этом проекция спина на ось z может принимать два значения $\pm\hbar/2$. Собственные значения оператора $\hat{s}^2$ имеют вид $\hbar^2 s(s+1)$, где $s=\frac{1}{2}$. Отсюда очевидно, что частица обладает спином, равным $\hbar/2$.

§ 118. Переход от уравнения Дирака к уравнению Паули и магнитный момент частицы

Посмотрим теперь, как преобразуется уравнение Дирака, если совершить в нем переход к нерелятивистскому приближению. Рассмотрим общий случай, когда частица движется во внешнем электромагнитном поле, так что уравнение Дирака имеет вид (113,12). Так же как при предельном переходе в скалярном релятивистском уравнении, выделим прежде всего энергию покоя, т. е. произведем преобразование вида

$$\psi=\psi' e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t}.$$

Тогда для функции ψ' получим уравнение

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}=\left[c\alpha\left(\hat{p}-\frac{e}{c}A\right)+mc^2(\beta-1)+e\varphi\right]\psi'. \tag{118,1}$$

Если волновую функцию записать в виде $\psi'=\begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}$, то совершенно так же, как для свободной частицы, получаем уравнения для w и w':

$$\left.\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial w}{\partial t} &= c\sigma\left(\hat{p}-\frac{e}{c}A\right)w'+e\varphi w, \\ i\hbar\frac{\partial w'}{\partial t} &= c\sigma\left(\hat{p}-\frac{e}{c}A\right)w-2mc^2w'+e\varphi w'. \end{aligned}\right\} \tag{118,2}$$

Как всегда, предельный переход к нерелятивистскому приближению соответствует формальному разложению по степеням c. Предположим вначале, что в общем случае движения частицы в поле, так же как и для свободной частицы, $w'\sim\frac{1}{c}w$. Тогда во втором из уравнений (118,2) можно пренебречь членами $i\hbar\frac{\partial w'}{\partial t}$ и $e\varphi w'$ как малыми по сравнению с величинами

$$c\sigma\left(\hat{p}-\frac{e}{c}A\right)w \quad \text{и} \quad mc^2w',$$