является суммой орбитального и собственного, спинового момента частицы. Операторы $\hat{s}_z$ и $\hat{s}^2$ в формулах (117,5) и (117,6) приведены к диагональному виду. При этом проекция спина на ось z может принимать два значения $\pm\hbar/2$. Собственные значения оператора $\hat{s}^2$ имеют вид $\hbar^2 s(s+1)$, где $s=\frac{1}{2}$. Отсюда очевидно, что частица обладает спином, равным $\hbar/2$.

§ 118. Переход от уравнения Дирака к уравнению Паули и магнитный момент частицы

Посмотрим теперь, как преобразуется уравнение Дирака, если совершить в нем переход к нерелятивистскому приближению. Рассмотрим общий случай, когда частица движется во внешнем электромагнитном поле, так что уравнение Дирака имеет вид (113,12). Так же как при предельном переходе в скалярном релятивистском уравнении, выделим прежде всего энергию покоя, т. е. произведем преобразование вида

$$\psi = \psi' e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t}.$$

Тогда для функции ψ' получим уравнение

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = \left[c\alpha\left(\hat{p} - \frac{e}{c}A\right) + mc^2(\beta - 1) + e\varphi\right]\psi'. \tag{118,1}$$

Если волновую функцию записать в виде $\psi' = \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}$, то совершенно так же, как для свободной частицы, получаем уравнения для w и w':

$$\left.\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial w}{\partial t} &= c\sigma\left(\hat{p} - \frac{e}{c}A\right)w' + e\varphi w, \\ i\hbar\frac{\partial w'}{\partial t} &= c\sigma\left(\hat{p} - \frac{e}{c}A\right)w - 2mc^2 w' + e\varphi w'. \end{aligned}\right\} \tag{118,2}$$

Как всегда, предельный переход к нерелятивистскому приближению соответствует формальному разложению по степеням c. Предположим вначале, что в общем случае движения частицы в поле, так же как и для свободной частицы, $w' \sim \frac{1}{c}w$. Тогда во втором из уравнений (118,2) можно пренебречь членами $i\hbar\frac{\partial w'}{\partial t}$ и $e\varphi w'$ как малыми по сравнению с величинами

$$c\sigma\left(\hat{p} - \frac{e}{c}A\right)w \quad \text{и} \quad mc^2 w',$$

пропорциональными c. Тогда получаем для спинора w' выражение

$$w' = \frac{1}{2mc}\,\sigma\left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) w, \tag{118,3}$$

находящееся в согласии с нашим допущением.

Подставляя (118,3) в первое из уравнений (118,2), находим

$$i\hbar\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\left[\sigma\left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]^2}{2m} w + e\varphi w. \tag{118,4}$$

Раскроем квадрат оператора в явном виде

$$\left[\sigma\left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]^2 = \left[\sigma_x\left(\hat{p}_x - \frac{e}{c}A_x\right) + \sigma_y\left(\hat{p}_y - \frac{e}{c}A_y\right) + \sigma_z\left(\hat{p}_z - \frac{e}{c}A_z\right)\right]^2.$$

При перемножении следует помнить, что операторы $\hat{\boldsymbol{p}}$ и $\boldsymbol{A}$ не коммутируют между собой. Выполняя умножение, находим

$$\begin{aligned}\left[\sigma\left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]^2 &= \sigma_x^2\left(\hat{p}_x - \frac{e}{c}A_x\right)^2 + \sigma_y^2\left(\hat{p}_y - \frac{e}{c}A_y\right)^2 + \\ &+ \sigma_z^2\left(\hat{p}_z - \frac{e}{c}A_z\right)^2 + \sigma_x\sigma_y\left(\hat{p}_x - \frac{e}{c}A_x\right)\left(\hat{p}_y - \frac{e}{c}A_y\right) + \\ &+ \sigma_y\sigma_x\left(\hat{p}_y - \frac{e}{c}A_y\right)\left(\hat{p}_x - \frac{e}{c}A_x\right) + \sigma_x\sigma_z\left(\hat{p}_x - \frac{e}{c}A_x\right)\left(\hat{p}_z - \frac{e}{c}A_z\right) + \\ &+ \sigma_z\sigma_x\left(\hat{p}_z - \frac{e}{c}A_z\right)\left(\hat{p}_x - \frac{e}{c}A_x\right) + \sigma_y\sigma_z\left(\hat{p}_y - \frac{e}{c}A_y\right)\left(\hat{p}_z - \frac{e}{c}A_z\right) + \\ &+ \sigma_z\sigma_y\left(\hat{p}_z - \frac{e}{c}A_z\right)\left(\hat{p}_y - \frac{e}{c}A_y\right). \end{aligned} \tag{118,5}$$

Согласно (60,16) имеем для матриц Паули

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1.$$

Мы видим, что сумма первых трех членов приводится к виду

$$\sigma_x^2\left(\hat{p}_x - \frac{e}{c}A_x\right)^2 + \sigma_y^2\left(\hat{p}_y - \frac{e}{c}A_y\right)^2 + \sigma_z^2\left(\hat{p}_z - \frac{e}{c}A_z\right)^2 = \left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2.$$

Дальнейшее преобразование будем производить только с членами

$$\sigma_x\sigma_y\left(\hat{p}_x - \frac{e}{c}A_x\right)\left(\hat{p}_y - \frac{e}{c}A_y\right) + \sigma_y\sigma_x\left(\hat{p}_y - \frac{e}{c}A_y\right)\left(\hat{p}_x - \frac{e}{c}A_x\right), \tag{118,6}$$

так как оставшиеся выражения преобразуются аналогичным (118,6) образом. Матрицы σ_x и σ_y антикоммутируют и, следовательно, выражение (118,6) можно переписать в виде

$$\frac{e}{c}\sigma_x\sigma_y\left[-\hat{p}_xA_y - A_x\hat{p}_y + \hat{p}_yA_x + A_y\hat{p}_x\right]. \tag{118,7}$$

Используя свойства коммутаций операторов $\hat{p}_x$ и $\hat{p}_y$ с операторами, зависящими от координат (26,10), имеем

$$\frac{e}{c}\sigma_x\sigma_y\left[-i\hbar\frac{\partial A_x}{\partial y}+i\hbar\frac{\partial A_y}{\partial x}\right]=\frac{ie\hbar}{c}\sigma_x\sigma_y\left[\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right]=$$
$$=\frac{ie\hbar}{c}\sigma_x\sigma_y\operatorname{rot}_z\boldsymbol{A}=\frac{ie\hbar}{c}\sigma_x\sigma_y\mathcal{H}_z.$$

Так как согласно (60,16) $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$, то имеем окончательно

$$\frac{ie\hbar}{c}\sigma_x\sigma_y\mathcal{H}_z=-\frac{e\hbar}{c}\sigma_z\mathcal{H}_z.$$

Совершая аналогичные преобразования с оставшимися членами из (118,5), получаем

$$\left[\sigma\left(\hat{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]^2=\left(\hat{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2-\frac{e\hbar}{c}\sigma\mathcal{H}. \tag{118,8}$$

Подставляя (118,8) в (118,4), находим

$$i\hbar\frac{\partial w}{\partial t}=\left\{\frac{\left(\hat{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2}{2m}+e\varphi-\frac{e\hbar}{2mc}\sigma\mathcal{H}\right\}w. \tag{118,9}$$

Мы видим, что при последовательном переходе к нерелятивистскому приближению уравнение Дирака автоматически переходит в уравнение Паули. Отсюда видно, что из теории Дирака следует не только существование спина частиц (равного $\hbar/2$), но и наличие у частиц собственного магнитного момента

$$\mu=\frac{e\hbar}{2mc}. \tag{118,10}$$

Теперь мы можем уточнить вопрос о том, к каким частицам, имеющим спин $\hbar/2$, можно применять уравнение Дирака. Если под m понимать массу электрона, то получается хорошее согласие между вычисленным и измеренным значением магнитного момента.

Таким образом, уравнение Дирака описывает поведение электронов с большой степенью точности. Уравнение Дирака позволяет, по-видимому, успешно описать свойства нейтрино — частицы с массой покоя $m = 0$ (см. § 123).

Однако попытки применить уравнение Дирака к тяжелым частицам со спином 1/2 — протону и нейтрону — не привели к вполне удовлетворительным результатам. С другой стороны, некоторые общие и весьма важные выводы из уравнения Дирака удалось перенести и на тяжелые частицы.

Оказалось, что качественно описанное поведение быстрых протонов и нейтронов также укладывается в рамки уравнения Дирака. Особенно важно то обстоятельство, что основная идея теории Дирака — существование античастиц — получила непосредственное подтверждение как для мезонов, так и для нуклонов.

В 1955 г. на ускорителе в реакции $p+p \to p+(\bar{p}+p)+p$ был обнаружен антипротон $\bar{p}$ — частица с отрицательным элементарным зарядом и с массой, равной массе протона. Несколько позднее наблюдалась реакция

$$p+\bar{p} \to n+\bar{n}$$

с образованием антинейтронов. Последние отличаются от нейтрона знаком магнитного момента и четностью. Античастицы аннигилируют с образованием других частиц. Например, протоны и антипротоны аннигилируют с образованием π- и K-мезонов.

Несмотря на все эти факты, количественные расчеты и, в частности, расчеты магнитного момента не согласуются с опытными данными. Если под m в формуле (118,10) понимать массу протона, то для его магнитного момента получается значение, отличающееся от опытного в 2,7 раза.

Это расхождение теории с опытом связано, по-видимому, с тем, что тяжелые частицы — протоны и нейтроны — сильно взаимодействуют с полем мезонов. В этом их отличие от электронов, которые сравнительно слабо взаимодействуют с электромагнитным полем [1]).

§ 119. Атом водорода в теории Дирака

Хотя движение электрона в атоме водорода отвечает нерелятивистским скоростям, нахождение релятивистских поправок к уровням энергии водорода представляло большой интерес, поскольку теория Шредингера не могла объяснить появление тонкой структуры в спектре водорода.

В § 38 было найдено, что уровни энергии атомов водорода зависят только от главного квантового числа. Между тем опыт показывает, что главное квантовое число характеризует уровни энергии лишь приближенно. В действительности имеет место расщепление возбужденных уровней на близкие подуровни. В результате в спектре водорода наблюдалось расщепление спектральных линий, ясно заметное в обычном спектрометре и особенно точно измеренное с помощью современных методов радиоспектроскопии. Оказалось, что это расщепление уровней связано со спин-орбитальным взаимодействием и вытекает из теории Дирака.

[1]) Соображения о возможности применения уравнения Дирака к нуклонам подробнее см. в книге: А. И. Ахиезер и В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, «Наука», 1969, стр 129.