степенью точности. Точно совпадали с опытными данными расположение термов, правила отбора и интенсивности линий. Лишь в 1953 г. Лэмбом, применившим радиоспектроскопические методы измерения, было обнаружено, что уровни $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$ имеют несколько различные энергии.

Это расхождение между формулой (119,2), полученной из теории Дирака, и опытом связано с фундаментальными свойствами материи — реальностью вакуума — и в конечном счете не только не противоречит теории Дирака, но является одним из самых блестящих ее подтверждений. Новые расчетные методы, с помощью которых из теории Дирака было найдено лэмбовское смещение, будут изложены в гл. XIV.

§ 120. Инвариантность уравнения Дирака по отношению к отражению, повороту и лоренцеву преобразованию координат

В § 113 мы рассмотрели некоторые свойства уравнения Дирака. Покажем теперь, что это уравнение удовлетворяет условиям инвариантности по отношению к отражению, повороту и преобразованию Лоренца. Поворот пространственной системы координат и преобразование Лоренца являются линейными и ортогональными преобразованиями. Мы можем записать их в виде

$$\left.\begin{aligned} x'_\mu &= a_{\mu\nu} x_\nu, \\ x_\nu &= a_{\mu\nu} x'_\mu, \\ a_{\mu\nu} a_{\mu\rho} &= \delta_{\nu\rho}. \end{aligned}\right\} \tag{120,1}$$

Найдем преобразование волновой функции

$$\psi' = S\psi, \tag{120,2}$$

которое оставляет инвариантным уравнение Дирака при линейных преобразованиях (120,1). Преобразованная волновая функция по условию удовлетворяет уравнению Дирака

$$\gamma_\mu \frac{\partial \psi'}{\partial x'_\mu} + \frac{mc}{\hbar} \psi' = 0. \tag{120,3}$$

Производные $\frac{\partial}{\partial x'_\mu}$ можно преобразовать с помощью соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}. \tag{120,4}$$

Используя (120,4), преобразуем уравнение (120,3) к виду

$$a_{\mu\nu} \gamma_\mu S \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + \frac{mc}{\hbar} S\psi = 0. \tag{120,5}$$

Если существует такая матрица S^{-1}, для которой выполняются условия

$$S^{-1}a_{\mu\nu}\gamma_\mu S=\gamma_\nu \quad \text{или} \quad S^{-1}\gamma_\mu S=\sum_\nu a_{\mu\nu}\gamma_\nu,$$

$$S^{-1}S=1, \tag{120,6}$$

то, умножая уравнение (120,3) на матрицу S^{-1}, мы приходим к уравнению (113,13).

Найдем теперь явный вид матрицы линейного преобразования при повороте пространственной системы координат и преобразованиях Лоренца. В случае поворота системы координат в плоскости x_1x_2 коэффициенты $a_{\mu\nu}$ определяются из соотношений

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi,\\ x_2' &= -x_1\sin\varphi+x_2\cos\varphi.\end{aligned}\right\} \tag{120,7}$$

Покажем теперь, что если матрицу S выбрать в виде

$$S=e^{\frac{\varphi}{2}\gamma_1\gamma_2}, \tag{120,8}$$

то соотношения (120,6) выполняются. Для этого разложим экспоненту в ряд

$$S=1+\frac{\varphi}{2}\gamma_1\gamma_2+\frac{\varphi^2}{2!4}(\gamma_1\gamma_2)^2+\frac{\varphi^3}{3!8}(\gamma_1\gamma_2)^3+\frac{\varphi^4}{4!16}(\gamma_1\gamma_2)^4+\ \ldots$$

Используя далее выражения

$$(\gamma_1\gamma_2)^2=\gamma_1\gamma_2\gamma_1\gamma_2=-\gamma_1\gamma_1\gamma_2\gamma_2=-1,$$

$$(\gamma_1\gamma_2)^3=(\gamma_1\gamma_2)^2\gamma_1\gamma_2=-\gamma_1\gamma_2,$$

$$(\gamma_1\gamma_2)^4=(\gamma_1\gamma_2)^2(\gamma_1\gamma_2)^2=1,$$

найдем

$$S=\left(1-\frac{\varphi^2}{2!4}+\frac{\varphi^4}{4!16}-\ \ldots\right)+\gamma_1\gamma_2\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\varphi^3}{3!8}+\frac{\varphi^5}{5!32}-\ \ldots\right). \tag{120,9}$$

Легко заметить, что матрица S равна

$$S=\cos\frac{\varphi}{2}+\gamma_1\gamma_2\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{120,10}$$

Проверим теперь соотношения (120,6). Равенство $S^{-1}S=1$ является очевидным. Найдем, например, выражение

$$S^{-1}\gamma_1 S=\left(\cos\frac{\varphi}{2}-\gamma_1\gamma_2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\gamma_1\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\gamma_1\gamma_2\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Пользуясь свойствами матриц γ и элементарными тригонометрическими формулами, найдем

$$S^{-1}\gamma_1 S = \gamma_1 \cos\varphi + \gamma_2 \sin\varphi = a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 = a_{1\nu}\gamma_\nu,$$

что находится в полном согласии с (120,6).

Перейдем теперь к преобразованиям Лоренца. Согласно § 10 ч. II преобразования Лоренца можно трактовать как поворот на мнимый угол $\varphi = i\chi$ в плоскости x_1x_4:

$$x_1' = x_1 \operatorname{ch}\chi - x_0 \operatorname{sh}\chi, \quad \operatorname{th}\chi = \frac{v}{c};$$

$$x_0' = -x_1 \operatorname{sh}\chi + x_0 \operatorname{ch}\chi, \quad \operatorname{sh}\chi = \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Матрицу S можно найти по аналогии с (120,8), заменив угол $\varphi \to i\chi$. Тогда S приобретает такой вид:

$$S = e^{\frac{i\chi}{2}\gamma_1\gamma_4} = \operatorname{ch}\frac{\chi}{2} + i\gamma_1\gamma_4 \operatorname{sh}\frac{\chi}{2}. \tag{120,11}$$

Помимо преобразования поворота и преобразования Лоренца необходимо рассмотреть преобразование инверсии в начале координат. При инверсии координат пространственные координаты изменяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\to -x_1', \\ x_2 &\to -x_2', \\ x_3 &\to -x_3', \\ x_4 &= x_4'. \end{aligned}\right\} \tag{120,12}$$

Мы должны потребовать, чтобы уравнение

$$\sum_{i=1}^{3} \gamma_i \frac{\partial\psi'}{\partial x_i'} + \gamma_4 \frac{\partial\psi'}{\partial x_4'} + \frac{mc}{\hbar}\psi' = 0$$

оставалось инвариантным при замене (120,12), а волновая функция подверглась преобразованию

$$\psi' = \hat{I}\psi.$$

Легко убедиться, что требование инвариантности будет выполняться, если оператор $\hat{I}$ имеет вид

$$\hat{I} = a\beta, \tag{120,13}$$

где a — некоторое число. Действительно, используя (120,12) и (120,13), получаем

$$-\sum_{i=1}^{3}\gamma_i\hat{I}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\hat{I}\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial x_4}+\frac{mc}{\hbar}\hat{I}\psi=0.$$

Умножив последнее уравнение слева на β и разделив на a, получаем уравнение (113,13).

Двойное преобразование инверсии либо возвращает систему в первоначальное состояние, либо отвечает повороту на 2π. В последнем случае ψ изменяет свой знак (см. (120,10)). Отсюда получаем условие

$$a^2=\pm 1. \qquad (120,14)$$

Для дальнейшего нам потребуются законы преобразования функции

$$\bar{\psi}=\psi^+\gamma_4. \qquad (120,15)$$

Их можно вывести, если заметить, что функция ψ^+ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\psi^+}{\partial x_i}\gamma_i+\frac{mc}{\hbar}\psi^+-\frac{\partial\psi^+}{ic\,\partial t}\gamma_4=0. \qquad (120,16)$$

Требования инвариантности этого уравнения по отношению к повороту пространственной системы координат и преобразованию Лоренца приводят к условию

$$\bar{\psi}'=\bar{\psi}S^{-1}. \qquad (120,17)$$

При преобразовании инверсии находим $\bar{\psi}'=a^*\bar{\psi}\gamma_4$.

§ 121. Законы преобразования билинейных комбинаций, составленных из волновых функций

В дальнейшем при обсуждении одной из основных проблем современной физики — проблемы взаимодействия между элементарными частицами — нам придется воспользоваться некоторыми свойствами билинейных комбинаций, составленных из волновой функции ψ и сопряженной с ней функции $\bar{\psi}$.

Именно, как мы увидим в дальнейшем, для релятивистски-инвариантной формулировки закона взаимодействия ядерных частиц необходимо знать законы изменения билинейных комбинаций из указанных величин при преобразованиях Лоренца, пространственных поворотах и инверсии. Простой подсчет показывает, что из компонент волновой функции и матриц γ можно