и (120,13), получаем

$$-\sum_{i=1}^{3}\gamma_i\hat{I}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\hat{I}\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial x_4}+\frac{mc}{\hbar}\hat{I}\psi=0.$$

Умножив последнее уравнение слева на β и разделив на a, получаем уравнение (113,13).

Двойное преобразование инверсии либо возвращает систему в первоначальное состояние, либо отвечает повороту на 2π. В последнем случае ψ изменяет свой знак (см. (120,10)). Отсюда получаем условие

$$a^2=\pm 1. \tag{120,14}$$

Для дальнейшего нам потребуются законы преобразования функции

$$\bar{\psi}=\psi^+\gamma_4. \tag{120,15}$$

Их можно вывести, если заметить, что функция ψ^+ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\psi^+}{\partial x_i}\gamma_i+\frac{mc}{\hbar}\psi^+-\frac{\partial\psi^+}{ic\,\partial t}\gamma_4=0. \tag{120,16}$$

Требования инвариантности этого уравнения по отношению к повороту пространственной системы координат и преобразованию Лоренца приводят к условию

$$\bar{\psi}'=\bar{\psi}S^{-1}. \tag{120,17}$$

При преобразовании инверсии находим $\bar{\psi}'=a^*\bar{\psi}\gamma_4$.

§ 121. Законы преобразования билинейных комбинаций, составленных из волновых функций

В дальнейшем при обсуждении одной из основных проблем современной физики — проблемы взаимодействия между элементарными частицами — нам придется воспользоваться некоторыми свойствами билинейных комбинаций, составленных из волновой функции ψ и сопряженной с ней функции $\bar{\psi}$.

Именно, как мы увидим в дальнейшем, для релятивистски-инвариантной формулировки закона взаимодействия ядерных частиц необходимо знать законы изменения билинейных комбинаций из указанных величин при преобразованиях Лоренца, пространственных поворотах и инверсии. Простой подсчет показывает, что из компонент волновой функции и матриц γ можно построить некоторые билинейные комбинации, которые обладают следующими трансформационными свойствами:

$\bar{\psi}\psi$ — одна компонента (скаляр),
$\bar{\psi}\gamma_i\psi$ — четыре компоненты (4-вектор),
$\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi$ — четыре компоненты (псевдовектор),
$\bar{\psi}\gamma_i\gamma_k\psi$ — шесть компонент $i \neq k$ (4-тензор второго ранга),
$\bar{\psi}\gamma_5\psi$ — одна компонента (псевдоскаляр).

Здесь введено обозначение

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (121,1)$$

Величина γ_5 обладает следующими свойствами:

$$\gamma_5^2 = 1, \quad \gamma_5\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_5 = 0, \quad \mu = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

В правильности последних соотношений легко убедиться непосредственной проверкой. Перейдем к доказательству указанных трансформационных свойств. При преобразованиях Лоренца и пространственного поворота в силу (120,2) и (120,17) можно написать $\bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}S^{-1}S\psi = \bar{\psi}\psi$. При отражении системы координат величина $\bar{\psi}\psi$ также остается неизменной в силу $\bar{\psi}'\psi' = a^*\bar{\psi}\gamma_4 a\gamma_4\psi = \bar{\psi}\psi$. Таким образом, мы видим, что величина $\bar{\psi}\psi$ является инвариантом по отношению к ортогональному преобразованию.

Покажем далее, что четыре величины $\bar{\psi}\gamma_i\psi$ преобразуются как компоненты четырехмерного вектора. При повороте системы координат и преобразовании Лоренца можем написать так:

$$\bar{\psi}'\gamma_i\psi' = \bar{\psi}S^{-1}\gamma_i S\psi.$$

В соответствии с формулой (120,6) находим

$$\bar{\psi}'\gamma_i\psi' = a_{i\nu}\bar{\psi}\gamma_\nu\psi. \qquad (121,2)$$

При инверсии координат получаем

$$\bar{\psi}'\gamma_i\psi' = a^*a\bar{\psi}\gamma_4\gamma_i\gamma_4\psi = -\bar{\psi}\gamma_i\psi \quad (i \neq 4). \qquad (121,3)$$

Таким образом, величина $\bar{\psi}\gamma_i\psi$ при инверсии изменяет свой знак. Формулы (121,2) и (121,3) показывают, что четыре компоненты действительно образуют четырехмерный вектор.

Покажем теперь, что величина $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ представляет псевдоскаляр. При инверсии координат имеем

$$\bar{\psi}'\gamma_5\psi' = a^*a\bar{\psi}\gamma_4\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_4\psi.$$

Используя вид матрицы γ_5 и свойство коммутаций матриц $\gamma_i\gamma_k + \gamma_k\gamma_i = 2\delta_{ik}$, легко находим

$$\bar{\psi}'\gamma_5\psi' = -\bar{\psi}\gamma_5\psi,$$

что и доказывает высказанное ранее утверждение. Величины $\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi$ при отражении не меняют знак, а при преобразованиях поворота и лоренцевых преобразованиях преобразуются как компоненты вектора. Следовательно, мы можем утверждать, что эти величины являются компонентами четырехмерного аксиального вектора или псевдовектора.

В тензорном характере величин $\bar{\psi}\gamma_i\gamma_k\psi$ можно убедиться аналогичным образом:

$$\bar{\psi}'\gamma_i\gamma_k\psi' = \bar{\psi}S^{-1}\gamma_i\gamma_k S\psi = \bar{\psi}S^{-1}\gamma_i SS^{-1}\gamma_k S\psi = a_{il}a_{km}\bar{\psi}\gamma_l\gamma_m\psi,$$

что совпадает с определением тензора.

§ 122. Понятие о слабых взаимодействиях. Несохранение четности

Мы видели уже, что, кроме электромагнитного взаимодействия, в природе имеется и другой вид взаимодействия — сильное взаимодействие между нуклонами.

Оказалось, что между частицами, помимо сильного взаимодействия, существует еще один вид взаимодействия, также не электромагнитного характера, получивший название слабого взаимодействия (см. § 130).

Слабые взаимодействия, не могущие связать воедино ядерные нуклоны, играют большую роль в физике элементарных и ядерных частиц. Они являются ответственными за радиоактивный распад ядер с испусканием легких частиц — электронов и нейтрино. Иными словами, слабое взаимодействие между элементарными частицами приводит к β-распаду.

Теория слабых взаимодействий достигла в последнее время существенных успехов. Однако последовательное рассмотрение относящихся сюда вопросов возможно лишь в рамках квантовой теории поля и поэтому мы ограничимся лишь некоторыми замечаниями. Прежде всего заметим, что уравнение Дирака (113,7) можно рассматривать как уравнение для некоторого электронно-позитронного поля ψ. О таком полевом подходе мы уже упоминали в § 112, когда рассматривали уравнение Клейна — Гордона — Фока. Частицы при полевом описании рассматриваются как кванты возбуждения соответствующего поля (например, фотоны — кванты возбуждения электромагнитного поля [см. §§ 101 и 102]). Тогда функцию ψ следует рассматривать как оператор в пространстве чисел заполнения (ср. формулу (99,26)