ГЛАВА XIV

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 124. Функция Грина уравнения Дирака

Развитая в гл. XIII теория взаимодействия нерелятивистских заряженных частиц с электромагнитным полем без труда обобщается на случай релятивистских частиц. Однако вычисления высших приближений теории возмущений (разложений по степеням $e^2/\hbar c$) приводили к расходящимся выражениям, физический смысл которых был неясен. Так, например, собственная энергия электрона, как и в классической электродинамике, оказывалась бесконечной. Поправки к эффективному сечению рассеяния, вычисленные во втором приближении теории возмущений, также оказывались не малыми, а бесконечно большими и т. д. Все это указывало на ограниченную область применимости расчетного аппарата квантовой электродинамики. Вместе с тем хорошее согласие с опытными данными эффективных сечений различных процессов, рассчитанных в первом неисчезающем приближении теории возмущений, указывало на правильность общих идей и методов теории.

Повышение точности экспериментальных методов исследования привело в последние годы к установлению новых фактов, не находивших объяснения в квантовой электродинамике. Именно, в 1947 г., кроме упомянутого открытия Лэмбом смещения уровней $2^2S_{1/2}$ и $2^2P_{1/2}$ атома водорода, которые по теории Дирака должны были бы совпадать, Раби установил, что величина магнитного момента электрона несколько отличается от магнетона Бора. Открытие этих явлений привело к дальнейшему интенсивному развитию квантовой электродинамики. Существенную роль в развитии теории сыграли работы Бете, Фейнмана, Дайсона, Швингера, Томонага и др. [1]). В частности,

[1]) Подробная библиография приведена в книге: С. Швебер, Г. Бете, Ф. Гофман, Мезоны и поля, т. I, ИЛ, 1957. Подробное изложение квантовой электродинамики см. также в книге: А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, «Наука», 1969. С. Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Релятивистская квантовая теория, ч. I, «Наука», 1968.

Фейнманом был предложен новый расчетный метод, позволяющий существенно упростить все вычисления, а также придать им наглядный физический смысл [1]). В рамках этой книги мы можем изложить лишь самые общие основы метода Фейнмана. Детальное его изложение, а также многочисленные примеры применения метода Фейнмана к конкретным задачам могут быть найдены в указанных статьях и монографиях.

Основу расчетного аппарата теории Фейнмана составляет метод функции Грина. Мы перейдем теперь непосредственно к изложению методики, предложенной Фейнманом. Прежде всего запишем уравнения Дирака в более компактной и удобной для этих расчетов форме. Для этого введем оператор

$$\hat{\nabla} \equiv \sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu},$$

где

$$x_4 = ix_0 = it.$$

В этих обозначениях уравнение Дирака имеет вид [2])

$$(\hat{\nabla} + m)\psi = 0. \tag{124,1}$$

Аналогично тому, как это делалось в нерелятивистской теории для уравнения Шредингера (см. § 29), введем функцию Грина $K(2, 1)$ уравнения Дирака (124,1). Функция Грина $K(2,1)$ по определению удовлетворяет уравнению

$$(\hat{\nabla}_2 + m) K(2, 1) = \frac{1}{i} \delta^4 (2, 1). \tag{124,2}$$

Здесь и в дальнейшем цифры 1 и 2 означают совокупность четырех координат x_μ, ∇_2 — оператор, действующий на переменные $x_{2\mu}$. Символ $\delta^4(2, 1)$ обозначает четырехмерную δ-функцию, равную

$$\delta^4 (2, 1) = \delta^4 (x_2 - x_1) = \delta (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \delta (t_2 - t_1). \tag{124,3}$$

Будем искать решение уравнения (124,1) в импульсном представлении. Иными словами, разложим функцию $K(2, 1)$ в интеграл Фурье

$$K(2, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} S(p) e^{ip_\mu (x_{2\mu} - x_{1\mu})} d^4 p, \tag{124,4}$$

---

[1]) R. P. Feynman, Phys. Rev. **76** 749 (1949). Русский перевод см. в сборнике «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954. См. также цитированные монографии.

[2]) Мы используем обозначения, несколько отличающиеся от введенных Фейнманом. Подобные обозначения приняты, например, в книге А. И. Ахиезера и В. Б. Берестецкого. Напомним также (см. сноску на стр. 496), что мы считаем в этой главе $\hbar = 1$, $c = 1$.

где
$$d^4p = d^3p\,dp_0 = dp_x\,dp_y\,dp_z\,dp_0 = dp_1\,dp_2\,dp_3\,dp_0.$$

p_μ — четырехмерный вектор импульса $p_4 = ip_0$. По индексу μ производится суммирование от 1 до 4. Чтобы не загромождать формулы индексами, мы в дальнейшем будем опускать индекс μ, если это не может повести к недоразумениям. Разлагая также в интеграл Фурье δ^4 (2,1) по формуле (см. приложение III)

$$\delta^4(2, 1) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x_2-x_1)}\, d^4p \tag{124,5}$$

и подставляя в (124,2) выражения (124,4) и (124,5), находим

$$(\hat{\nabla}_2 + m) \int S(p)\, e^{ip(x_2-x_1)}\, d^4p = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int e^{ip(x_2-x_1)}\, d^4p. \tag{124,6}$$

Действие оператора $(\hat{\nabla}_2 + m)$ дает

$$(\hat{\nabla}_2 + m)\, e^{ip(x_2-x_1)} = (i\hat{p} + m)\, e^{ip(x_2-x_1)}, \tag{124,7}$$

где[1])

$$\hat{p} = p_\mu \gamma_\mu.$$

Приравнивая в (124,6) компоненты Фурье и учитывая (124,7) можно написать формальное решение для $S(p)$

$$S(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} \frac{1}{i\hat{p} + m} = \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{i\hat{p} - m}{(i\hat{p} + m)(i\hat{p} - m)} = \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2}, \tag{124,8}$$

где

$$\hat{p}^2 = \sum_{\mu,\nu} p_\mu p_\nu \gamma_\mu \gamma_\nu = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} (\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu)\, p_\mu p_\nu = \sum_\mu p_\mu p_\mu = p^2.$$

Мы воспользовались антикоммутативностью матриц γ. Для $K(2, 1)$ соответственно имеем

$$K(2, 1) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2}\, e^{ip(x_2-x_1)}\, d^4p, \tag{124,9}$$

Последнее выражение удобно записать в виде

$$K(2, 1) = i(\hat{\nabla}_2 - m)\, I(2, 1), \tag{124,10}$$

где $I(2, 1)$ — интеграл, зависящий только от обычных переменных, но не от матриц Дирака, и равный

$$I(2, 1) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ip(x_2-x_1)}}{p^2 + m^2}\, d^4p. \tag{124,11}$$

---

[1]) Подчеркнем, что в этой главе знак $\wedge$ имеет другой смысл, чем в предыдущих главах книги.

Произведем интегрирование по переменной p_0:

$$I(2,\,1) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}\,d^3p\int \frac{e^{-ip_0(t_2-t_1)}}{p_0^2-E_p^2}\,dp_0,$$

где

$$E_p = +\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}.$$

Если рассматривать p_0 как некоторую комплексную переменную, то интегрирование в плоскости этой комплексной переменной производится по всей вещественной оси. Однако подынтегральная функция имеет на этой оси полюса в точках $p_0 = E_p$ и $p_0 = -E_p$. Следовательно, для того чтобы интеграл (124,11) имел определенный смысл, необходимо задать правило обхода этих полюсов. Фейнманом было предложено следующее правило обхода: левый полюс обходится снизу, а правый сверху. Для выполнения такого обхода следует прибавить к массе m бесконечно малую отрицательную мнимую часть, которую в окончательном результате следует устремить к нулю:

$$m \to m - i\delta, \qquad \delta > 0.$$

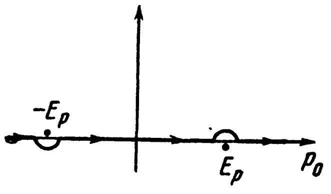

Рис. 29.

Действительно, при этом E_p также получает бесконечно малую отрицательную мнимую добавку, и соответственно полюсы подынтегральной функции располагаются, как показано на рис. 29. Мы можем теперь произвести интегрирование, замыкая контур интегрирования бесконечно большой полуокружностью и вычисляя вычеты в соответствующих полюсах. Поскольку под знаком интеграла стоит экспоненциальная функция, контур интегрирования замыкается снизу при $t_2 > t_1$ и сверху при $t_2 < t_1$. Соответственно при $t_2 > t_1$ вычет берется в точке $p_0 = E_p$, а при $t_2 < t_1$ — в точке $p_0 = -E_p$. Таким образом, получаем:

$$I(2,\,1) = \frac{i}{16\pi^3}\int \frac{1}{E_p}\,e^{i(\mathbf{p},\,\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)-iE_p(t_2-t_1)}\,d^3p,\quad t_2 > t_1. \qquad (124,12)$$

$$I(2,\,1) = \frac{i}{16\pi^3}\int \frac{1}{E_p}\,e^{i(\mathbf{p},\,\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)+iE_p(t_2-t_1)}\,d^3p,\quad t_2 < t_1. \qquad (124,13)$$

Мы видим, что поскольку $E_p > 0$, то при $t_2 > t_1$ вклад дают лишь состояния с положительной энергией, а при $t_2 < t_1$ — соответственно лишь состояния с отрицательной энергией. Отметим, что полученный результат существенно отличается от имевшего место в нерелятивистской теории. Действительно, там функция Грина полагалась [ср. с (29,3)] равной нулю при $t_2 < t_1$. Аналогичное выражение мы получили бы и в релятивистском случае, если бы оба полюса обходились сверху, что соответствует замене $p_0 \to p_0 + i\delta$ в подынтегральной функции.

Вычисление, аналогичное только что произведенному, показывает, что при такой замене времени $t_2 > t_1$ отвечало бы суммирование как по положительным, так и по отрицательным энергиям, а при $t_2 < t_1$ мы получили бы $I = 0$. Однако из дальнейшего будет видно, что использование функции Грина, предложенной Фейнманом и определяемой формулами (124,12), (124,13), является значительно более удобным.

С помощью введенной функции Грина можно построить решение уравнения Дирака, т. е. получить формулу, аналогичную нерелятивистскому соотношению (29,2). Проще всего для этой цели воспользоваться теоремой Гаусса в 4-пространстве ($d^4x = d^3x\,dt$)

$$i \int \frac{\partial F_\mu(x)}{\partial x_\mu} d^4x = \int_S F_\mu(x) n_\mu\, d\sigma(x), \qquad (124,13')$$

где F — произвольный 4-вектор, S — поверхность, охватывающая данный четырехмерный объем, а $n(x)$ — внешняя нормаль к этой поверхности в точке x. Полагая

$$F_\mu(x') = K(x - x')\gamma_\mu \psi(x'),$$

получим:

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial K(x-x')}{\partial x'_\mu}\gamma_\mu\psi(x') + K(x - x')\gamma_\mu \frac{\partial \psi(x')}{\partial x'_\mu} =$$

$$= -\frac{\partial K(x-x')}{\partial x_\mu}\gamma_\mu\psi(x') + K(x - x')\gamma_\mu \frac{\partial \psi(x')}{\partial x'_\mu}.$$

Из (124,10) следует, что

$$\frac{\partial K(x-x')}{\partial x_\mu}\gamma_\mu = \gamma_\mu \frac{\partial K(x-x')}{\partial x_\mu} = \hat{\nabla}_x K(x - x').$$

Воспользовавшись соотношениями (124,1), (124,2), получим

$$\frac{\partial F_\mu(x')}{dx'_\mu} = -(\hat{\nabla}_x + m) K(x-x')\psi(x') = i\delta^4(x-x')\psi(x').$$

Подставляя это выражение в выписанный выше четырехмерный интеграл и воспользовавшись (124,13′), получим

$$\psi(x) = -\int_S K(x - x')\gamma_\mu\psi(x') n_\mu(x')\, d\sigma(x').$$

Обозначая точку x через точку 2, а точку x' через точку 1, мы можем переписать полученное соотношение в виде

$$\psi(2)=\int\limits_{t_1} K(2,1)\,\gamma_4\psi(1)\,d^3x_1-\int\limits_{t'_1} K(2,1')\,\gamma_4\psi(1')\,d^3x_{1'}. \qquad (124,14)$$

Здесь в качестве поверхности интегрирования выбраны две бесконечные пространственноподобные плоскости $t=t_1$ и $t=t_{1'}$, причем $t_1<t_2<t_{1'}$. Интегрирование по времениподобным поверхностям можно опустить, так как они пространственно удалены от точки 2 сколь угодно далеко, а функция $K(2,1)$, как можно показать, в пространственноподобных направлениях экспоненциально убывает до нуля при неограниченном возрастании пространственных расстояний [1]).

Функция $K(2,1)$ содержит суммирование только по состояниям с положительной энергией, а функция $K(2,1')$, при $t_2<t'_1$ — лишь по состояниям с отрицательной энергией. Поэтому первый интеграл в (124,14) отличен от нуля для компонент $\psi(1)$, отвечающих частицам с положительной энергией, а второй интеграл соответственно не равен нулю для компонент $\psi(1')$, отвечающих частицам с отрицательной энергией.

Мы видим, что волновая функция частицы в точке 2 четырехмерного пространства определяется функцией Грина и значениями $\psi(1)$ и $\psi(1')$. Аналогичным образом, полагая $F_\mu=$ $=\bar\psi(x')\gamma_\mu K(x'-x)$, легко найти выражения для функции $\bar\psi(2)$:

$$\bar\psi(2)=\int\limits_{t'_1>t_2}\bar\psi(1')\,\gamma_4K(1',2)\,d^3x_{1'}-\int\limits_{t_1<t_2}\bar\psi(1)\,\gamma_4K(1,2)\,d^3x_1, \qquad (124,15)$$

где функция $\bar\psi(x)=\psi^+(x)\gamma_4$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\bar\psi}{\partial x_\mu}\gamma_\mu-m\bar\psi=0$$

или

$$\bar\psi(\hat\nabla-m)=0.$$

При такой форме записи оператор $\hat\nabla$ действует на функции, стоящие слева от него.

Компоненты волновой функции, отвечающие отрицательным энергиям E, трактуются в теории Фейнмана как амплитуды вероятности нахождения частицы в позитронном состоянии, т. е. в состоянии с положительной энергией $+E$ и зарядом $+e$. Таким образом, функция $\psi(2)$ является заданной, если известна амплитуда электронного сотояния $\psi(1)$ в момент $t_1<t_2$ и амплитуда позитронного состояния $\psi(1')$ в момент $t_{1'}>t_2$.

[1]) См. работу Фейнмана (ссылка на стр. 504).

Фазовый множитель, входящий в функцию $K(2, 1)$, при $t_2 < t_1$ зависит от времени по закону $e^{iE_p(t_2-t_1)} = e^{-iE_p|t_2-t_1|}$ [см. (124,13)]. Иными словами, временной множитель у функции $K(2, 1')$ зависит от $(t_2 - t_{1'})$ так же, как фазовый множитель волновой функции, отвечающей частицам с положительной энергией. В соответствии с этим позитронные состояния можно рассматривать как состояния частицы с положительной энергией, но распространяющейся в обратном направлении по оси времени. Этому соответствует то обстоятельство, что состояние позитрона должно быть задано в момент времени $t_{1'} > t_2$ [второй интеграл в формуле (124,14)].

Предположим теперь, что имеется внешнее электромагнитное поле. В наших обозначениях уравнение Дирака в этом случае запишется в виде

$$(\hat{\nabla} - ie\hat{A} + m)\psi = 0, \tag{124,16}$$

где $\hat{A} = A_\mu\gamma_\mu$, $A_4 = i\varphi$ (φ — скалярный потенциал).

Функция Грина, как обычно, определяется уравнением

$$(\hat{\nabla}_x - ie\hat{A} + m)\,K^A(x - x') = -\,i\delta(x - x').$$

Функция $K^A(2, 1)$, так же как и функция $K(2, 1)$, содержит в своем разложении только компоненты, отвечающие положительным энергиям при $t_2 > t_1$ и отрицательным энергиям при $t_2 < t_1$. Соотношения (124,14) и (124,15) остаются в силе, если только заменить в них $K(2, 1)$ на $K^A(2, 1)$.

Так же как и в нерелятивистском случае, можно сформулировать интегральное уравнение, которому удовлетворяет функция $K^A(2,1)$. Именно,

$$K^A(2, 1) = K(2, 1) - e\int K(2, 3)\,\hat{A}(3)\,K^A(3, 1)\,d^4x_3. \tag{124,17}$$

Вывод интегрального уравнения (124,17) не отличается от вывода интегрального уравнения (29,17). Как мы уже выяснили в § 58, уравнение такого типа удобно решать методом последовательных приближений [см. (58,5)].

§ 125. Функция Грина для системы из двух частиц

Найденное выше выражение для волновой функции одной частицы необходимо обобщить на случай системы взаимодействующих частиц. Простейшим примером такой системы является система, состоящая из двух частиц, связанных между собой взаимодействием электромагнитного характера. Заметим прежде всего, что функция Грина системы двух невзаимодействующих частиц равна произведению функции Грина каждой