Фазовый множитель, входящий в функцию $K(2,1)$, при $t_2 < t_1$ зависит от времени по закону $e^{iE_p(t_2-t_1)} = e^{-iE_p|t_2-t_1|}$ [см. (124,13)]. Иными словами, временной множитель у функции $K(2,1')$ зависит от $(t_2 - t_{1'})$ так же, как фазовый множитель волновой функции, отвечающей частицам с положительной энергией. В соответствии с этим позитронные состояния можно рассматривать как состояния частицы с положительной энергией, но распространяющейся в обратном направлении по оси времени. Этому соответствует то обстоятельство, что состояние позитрона должно быть задано в момент времени $t_{1'} > t_2$ [второй интеграл в формуле (124,14)].

Предположим теперь, что имеется внешнее электромагнитное поле. В наших обозначениях уравнение Дирака в этом случае запишется в виде

$$(\hat{\nabla} - ie\hat{A} + m)\psi = 0, \tag{124,16}$$

где $\hat{A} = A_\mu\gamma_\mu$, $A_4 = i\varphi$ (φ — скалярный потенциал).

Функция Грина, как обычно, определяется уравнением

$$(\hat{\nabla}_x - ie\hat{A} + m)K^A(x - x') = -i\delta(x - x').$$

Функция $K^A(2,1)$, так же как и функция $K(2,1)$, содержит в своем разложении только компоненты, отвечающие положительным энергиям при $t_2 > t_1$ и отрицательным энергиям при $t_2 < t_1$. Соотношения (124,14) и (124,15) остаются в силе, если только заменить в них $K(2,1)$ на $K^A(2,1)$.

Так же как и в нерелятивистском случае, можно сформулировать интегральное уравнение, которому удовлетворяет функция $K^A(2,1)$. Именно,

$$K^A(2,1) = K(2,1) - e\int K(2,3)\hat{A}(3)K^A(3,1)\,d^4x_3. \tag{124,17}$$

Вывод интегрального уравнения (124,17) не отличается от вывода интегрального уравнения (29,17). Как мы уже выяснили в § 58, уравнение такого типа удобно решать методом последовательных приближений [см. (58,5)].

§ 125. Функция Грина для системы из двух частиц

Найденное выше выражение для волновой функции одной частицы необходимо обобщить на случай системы взаимодействующих частиц. Простейшим примером такой системы является система, состоящая из двух частиц, связанных между собой взаимодействием электромагнитного характера. Заметим прежде всего, что функция Грина системы двух невзаимодействующих частиц равна произведению функции Грина каждой из частиц:

$$K(3,\,4;\;1,\,2)=K_a(3,\,1)\,K_b(4,\,2). \tag{125,1}$$

Здесь $K_a(3,1)$ — функция Грина свободной частицы a, распространяющейся из точки *1* в точку *3*. Аналогичный смысл имеет величина $K_b(4,2)$ для частицы b.

В случае системы двух взаимодействующих частиц функция Грина, даваемая формулой (125,1), может рассматриваться как нулевое приближение по взаимодействию. Найдем теперь функцию Грина $K^{(1)}(3,4;\;1,2)$ в первом приближении по взаимодействию. Именно, будем рассматривать две заряженные частицы, которые описываются уравнением Дирака. Для того чтобы написать оператор взаимодействия, удобно, следуя Фейнману, сначала рассмотреть нерелятивистское приближение, а затем провести соответствующее обобщение на случай релятивистских частиц. В нерелятивистском приближении взаимодействие между частицами описывается законом Кулона, а функция $K^{(1)}(3,4;\;1,2)$ по аналогии с формулой (58,3) определяется соотношением

$$K^{(1)}(3\,4;\;1,\,2)=$$
$$=-ie^2\int K_a(3,\,5)\,K_b(4,\,6)\,\frac{1}{r_{56}}\,\delta(t_{56})\,K_a(5,\,1)\,K_b(6,\,2)\,dx_5^4\,dx_6^4, \tag{125,2}$$

где $r_{56}=|\boldsymbol{r}_5-\boldsymbol{r}_6|$. Смысл выражения для $K^{(1)}(3,4;\;1,2)$ легко понять, если сопоставить ему некоторую диаграмму (рис. 30), которая трактуется следующим образом. Частица a распространяется из точки *1* в точку *3*, проходя через промежуточную точку *5*. Линия *2 — 6 — 4* описывает распространение частицы b. Линии *1 — 5* на диаграмме соответствует функция распространения $K_a(5,1)$, а линия *2 — 6* — соответственно функциям $K_b(6,2)$. В точках *5* и *6* осуществляется взаимодействие между частицами. Пунктир соответствует выражению $\frac{e^2}{r_{56}}\,\delta(t_{56})$, где $r_{56}=|\boldsymbol{r}_5-\boldsymbol{r}_6|$ — пространственное расстояние между точками *5* и *6*, а $t_{56}=t_5-t_6$, где t_5 и t_6 — моменты времени, в которые частицы a и b попадают в точки *5* и *6*. Дельта-функция временно́го аргумента означает, что в нерелятивистском приближении следует пренебрегать запаздыванием и рассматривать частицы, находящиеся в точке *5* и *6* в один и тот же момент времени $t=t_5=t_6$. Линии *5 — 3* и *6 — 4* соответствуют движению свободных частиц после взаимодействия (функции $K_a(3,5)$, $K_b(4,6)$ в (125,2)).

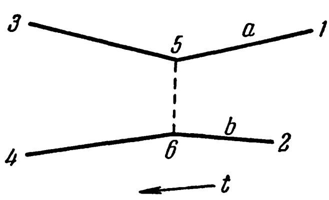

Рис. 30.

Обобщение выражения (125,2) на релятивистский случай включает прежде всего учет запаздывания взаимодействия. На первый взгляд может показаться, что для этого следует заменить $\delta(t_{56})$ на $\delta(t_{56}-r_{56})$, где r_{56} определяет время запаздывания (в наших обозначениях — скорость распространения взаимодействия $c=1$). Однако подобная замена была бы неправильной. Действительно, электромагнитное взаимодействие представляет обмен фотонами, обладающими положительной энергией. Между тем разложение δ-функции в интеграл Фурье содержит как положительные, так и отрицательные частоты. Поэтому для перехода от кулоновского взаимодействия к релятивистскому обобщению с учетом запаздывания следует заменить δ-функцию на функцию δ_+, определенную соотношением

$$\delta_+(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty e^{-i\omega(x-i\varepsilon)}\frac{d\omega}{\pi}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x-i\varepsilon}\frac{1}{\pi i}. \tag{125,3}$$

Определенный таким образом аналог δ-функции содержит разложение лишь по положительным частотам. Так как t_{56} принимает как положительные, так и отрицательные значения, то берется симметризованная комбинация

$$\frac{1}{2r_{56}}\left(\delta_+\left(t_{56}-r_{56}\right)+\delta_+\left(-t_{56}-r_{56}\right)\right)=\delta_+\left(t_{56}^2-r_{56}^2\right)=\delta_+\left(-x_{56}^2\right).$$

Приведенное равенство сразу находится с помощью формулы (125,3).

Кроме того, нужно учесть, что если частицы движутся, то существует, помимо кулоновского, электромагнитное взаимодействие [см. (25,27), ч. II]. Это приводит к тому, что взаимодействие определяется выражением

$$\left(1-\boldsymbol{v}_5\boldsymbol{v}_6\right)e^2\delta_+\left(-x_{56}^2\right).$$

Оператор взаимодействия мы получим, если заменим векторы скорости $\boldsymbol{v}_5$, $\boldsymbol{v}_6$ на операторы α_a, α_b, причем каждый из операторов действует соответственно на переменные a-й и b-й частиц[1]). Тогда для оператора взаимодействия в релятивистском случае можно в силу (113,14) написать:

$$\left(1-\alpha_a\alpha_b\right)e^2\delta_+\left(-x_{56}^2\right)=e^2\beta_a\beta_b\gamma_{a\mu}\gamma_{b\mu}\delta_+\left(-x_{56}^2\right).$$

Нам осталось для получения окончательного выражения функции $K^{(1)}(3,4;\ 1,2)$ установить связь между релятивистскими

---

[1]) Действительно оператор скорости легко может быть найден по формуле $v=[\hat{H},\boldsymbol{r}]$. Но $\hat{H}$ [см. (113,7)] равен $\hat{H}=\frac{1}{i}\alpha\nabla+\beta m$ и коммутируя, мы получаем $[\hat{H},\boldsymbol{r}]=\alpha$.

и нерелятивистскими функциями Грина. Для этого сравним формулы (29,3) и (124,14). Мы видим, что имеет место соответствие

$$K_{\text{нерелят}} \to K_{\text{релят}}\beta.$$

Таким образом, для частиц, описываемых уравнением Дирака, имеем:

$$K^{(1)}(3, 4; 1, 2)\beta_a\beta_b = -ie^2 \int K_a(3, 5) K_b(4, 6)\gamma_{a\mu}\gamma_{b\mu}\delta_+(-x_{56}^2) \times \\ \times K_a(5, 1) K_b(6, 2)\beta_a\beta_b\, d^4x_5\, d^4x_6. \quad (125,4)$$

Умножая (125,4) справа на $\beta_a\beta_b$, находим окончательно:

$$K^{(1)}(3, 4; 1, 2) = -ie^2 \int K_a(3, 5) K_b(4, 6)\gamma_{a\mu}\gamma_{b\mu}\delta_+(-x_{56}^2) \times \\ \times K_a(5, 1) K_b(6, 2)\, d^4x_5\, d^4x_6 = \\ = e^2 \int K_a(3, 5) K_b(4, 6)\gamma_{a\mu} D(-x_{56}^2)\gamma_{b\mu} K_a(5, 1) K_b(6, 2)\, d^4x_5\, d^4x_6. \quad (125,5)$$

Функцию $D(-x_{56}^2) = -i\delta_+(-x_{56}^2)$ обычно называют функцией распространения виртуального фотона. Итак, мы видим, что с учетом релятивистских эффектов диаграмму рис. 30 можно трактовать следующим образом. Функции K отвечают сплошным (электронным) линиям, функция D — пунктирной линии, а вершинам отвечают матрицы $e\gamma_{a\mu}$, $e\gamma_{b\mu}$.

Все расчеты в теории Фейнмана существенно упрощаются, если их проводить в импульсном представлении. Вид функции K в p-представлении дается формулой (124,8). Таким образом, остается определить компоненту Фурье функции δ_+. Покажем, что имеет место следующее соотношение:

$$\delta_+(-x^2) = \frac{1}{4\pi^3} \int \frac{e^{ikx}}{k^2 - i\varepsilon}\, d^4k, \quad (125,6)$$

где ε — бесконечно малая величина. Она определяет правило обхода полюсов. В правильности соотношения (125,6) убедимся, непосредственно вычисляя интеграл, стоящий справа:

$$\int \frac{e^{ikx}}{k^2 - i\varepsilon}\, d^4k = \int e^{i\mathbf{kr}}\, d^3k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_0x_0}}{\mathbf{k}^2 - k_0^2 - i\varepsilon}\, dk_0.$$

Предположим, например, что $x_0 > 0$. Замыкая контур интегрирования снизу и находя вычеты, получаем

$$2\pi i \int \frac{e^{i\mathbf{kr}}}{2\,|\mathbf{k}|}\, e^{-ik|x_0|}\, d^3k.$$

Представляя d^3k в виде $k^2\, dk\, d\Omega$ и интегрируя по углам, получаем с учетом (125,3) искомое соотношение.