Здесь D_f — компонента Фурье функции распространения виртуального фотона D, которая согласно (125,5) и (125,6) дается формулой

$$D_f(k) = -\frac{i}{4\pi^3}\frac{1}{k^2}. \tag{126,15}$$

Остановимся кратко на поправках, которые возникают в высших приближениях теории возмущений. Диаграммы, отвечающие этим поправкам, естественно, должны содержать большее число вершин по сравнению с соответствующей основной диаграммой (каждой вершине отвечает параметр малости e). Именно числом вершин и определяется порядок малости рассматриваемой поправки.

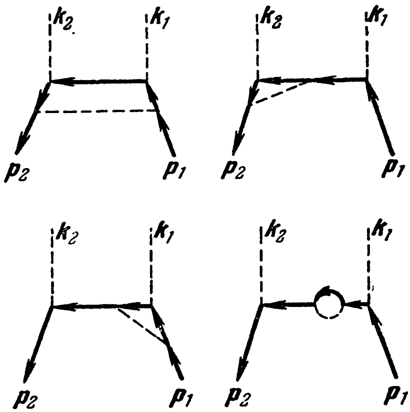

Рис. 37.

Рассмотрим, например, диаграммы, отвечающие следующему приближению к теории комптон-эффекта. Как легко понять, диаграмме рис. 33, *а* соответствуют поправки на рис. 37. Аналогично и для диаграммы рис. 33, *б*. Все эти диаграммы отличаются от исходной диаграммы (см. рис. 33) наличием внутренней фотонной линии. Эта линия отвечает, как мы уже видели, излучению и поглощению виртуального кванта. Поэтому эти поправки обычно называются радиационными. Вычисление этих поправок связано с определенными трудностями и потребовало разработки так называемого метода перенормировок. Мы не будем останавливаться на этих вопросах[1]).

§ 127. Комптон-эффект

Для иллюстрации техники расчета эффективных сечений в теории Фейнмана рассмотрим подробнее теорию комптон-эффекта. Амплитуда перехода для этого процесса была уже получена с помощью диаграммы Фейнмана (см. рис. 33) и имела вид (126,11). Выделяя δ-функцию, напишем амплитуду перехода в виде

$$M = M_{21}\delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2), \tag{127,1}$$

[1]) См., например, А. И. Ахиезер и В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, «Наука», 1969.

где

$$M_{21} = ie^2 \frac{(2\pi)^5}{\sqrt{\omega_1\omega_2}} \bar{u}(p_2)\left[\hat{e}_2 \frac{i(\hat{p}_1+\hat{k}_1)-m}{(\hat{p}_1+\hat{k}_1)^2+m^2}\hat{e}_1+\hat{e}_1 \frac{i(\hat{p}_1-\hat{k}_2)-m}{(\hat{p}_1-\hat{k}_2)^2+m^2}\hat{e}_2\right]u(p_1).$$

Вероятность комптон-эффекта дается формулой

$$P'_{21} = |M_{21}|^2 (\delta^4(p_1+k_1-p_2-k_2))^2. \qquad (127,2)$$

Для того чтобы исключить квадрат δ-функции, удобно воспользоваться определением четырехмерной δ-функции

$$\delta^4(p) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ipx}\,d^4x.$$

В точке $p=0$, которая только и играет существенную роль, как видно из (127,2), четырехмерный интеграл равен $\frac{1}{(2\pi)^4}VT$, где V — нормировочный объем, а T — время процесса. Выбирая V за единицу, для вероятности P_{21} перехода в единицу времени имеем

$$P_{21} = \frac{1}{T}P'_{21} = \frac{1}{(2\pi)^4}|M_{21}|^2\delta^4(p_1+k_1-p_2-k_2). \qquad (127,3)$$

Конечное состояние системы определяется импульсами электрона $\boldsymbol{p}_2$ и рассеянного фотона $\boldsymbol{k}_2$. Число конечных состояний в интервале импульсов $d\boldsymbol{p}_2$ и $d\boldsymbol{k}_2$ дается обычным соотношением $\frac{d\boldsymbol{p}_2\,d\boldsymbol{k}_2}{(2\pi)^6}$. Вероятность перехода в интервал конечных состояний $d\boldsymbol{p}_2\,d\boldsymbol{k}_2$ напишется в виде

$$dW_{21} = \frac{1}{(2\pi)^4}|M_{21}|^2\delta^4(p_1+k_1-p_2-k_2)\frac{d\boldsymbol{p}_2\,d\boldsymbol{k}_2}{(2\pi)^6}. \qquad (127,4)$$

Четырехмерная δ-функция выражает закон сохранения энергии и импульса

$$p_1+k_1 = p_2+k_2. \qquad (127,5)$$

Из этого соотношения легко определить частоту рассеянного фотона как функцию угла рассеяния ϑ, т. е. угла между векторами $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$,

$$p_1^2+k_1^2+2p_1k_1 = p_2^2+k_2^2+2p_2k_2,$$

но

$$p_1^2 = \boldsymbol{p}_1^2 - E_1^2 = -m^2 = p_2^2, \qquad k_1^2 = \boldsymbol{k}_1^2 - \omega_1^2 = k_2^2 = 0$$

и следовательно, $p_1k_1 = p_2k_2$. Пользуясь (127,5), имеем

$$p_1k_1 = p_1k_2 + k_1k_2.$$

Предположим для простоты, что электрон первоначально покоился: $\boldsymbol{p}_1 = 0$, $E_1 = m$. После простых выкладок [ср. (17,11) ч. II] находим

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{1 + \frac{\omega_1}{m}(1 - \cos\vartheta)}. \qquad (127,6)$$

Интегрируя (127,4) по трем компонентам импульса, получаем

$$dW_{21} = \frac{1}{(2\pi)^{10}} |M_{21}|^2 \delta(m + \omega_1 - E_2 - \omega_2)\, \omega_2^2\, d\omega_2\, d\Omega. \qquad (127,7)$$

Проинтегрируем это выражение по частоте ω_2. При этом нужно помнить, что энергия E_2 также является функцией ω_2:

$$E_2 = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}_2^2} = \sqrt{m^2 + (\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)^2} = \sqrt{m^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2\cos\vartheta}.$$

Введем новую переменную $y = E_2 + \omega_2$:

$$dW_{21} = \frac{1}{(2\pi)^{10}} |M_{21}|^2 \delta(m + \omega_1 - y)\, \omega_2^2 \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial\omega_2}}\, dy\, d\Omega. \qquad (127,8)$$

Интегрируя по y, имеем

$$dW_{21} = \frac{1}{(2\pi)^{10}} |M_{21}|^2 \omega_2^2 \left.\frac{1}{\frac{\partial y}{\partial\omega_2}}\right|_{\omega_2 + E_2 = m + \omega_1} d\Omega, \qquad (127,9)$$

но

$$\frac{\partial y}{\partial\omega_2} = \frac{\partial(E_2 + \omega_2)}{\partial\omega_2} = 1 + \frac{1}{E_2}(\omega_2 - \omega_1\cos\vartheta). \qquad (127,10)$$

Так как берется значение ω_2, удовлетворяющее закону сохранения энергии, то, подставляя (127,6) в (127,10), для вероятности перехода (127,9) находим

$$dW_{21} = \frac{1}{(2\pi)^{10}} \frac{\omega_2^3 E_2}{m\omega_1} |M_{21}|^2 d\Omega. \qquad (127,11)$$

Сечение процесса мы получим, деля вероятность перехода на плотность потока падающих фотонов. При нормировке 1 фотон в объеме $V = 1$ плотность потока численно равна скорости света c. В выбранной нами системе единиц $c = 1$ и эффективное сечение получается численно равным dW_{21}. Полагаем также [см. (126,11)]

$$M_{21} = ie^2 \frac{(2\pi)^5}{2m\sqrt{\omega_1\omega_2}} (\bar{u}(\boldsymbol{p}_2)\, \hat{Q} u(\boldsymbol{p}_1)),$$

где

$$Q = \left[\hat{e}_2 \frac{i(\hat{p}_1 + \hat{k}_1) - m}{(\hat{p}_1 + \hat{k}_1)^2 + m^2} \hat{e}_1 + \hat{e}_1 \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}_2) - m}{(\hat{p}_1 - \hat{k}_2)^2 + m^2} \hat{e}_2\right] 2m.$$

Выражение для оператора Q можно несколько упростить, если учесть, что

$$(\hat{p}_1 + \hat{k}_1)^2 + m^2 = p_1^2 + k_1^2 + 2p_1k_1 + m^2 = 2p_1k_1 = -2\omega_1 m.$$

Аналогично для знаменателя второй дроби можно написать:

$$(\hat{p}_1 - \hat{k}_2)^2 + m^2 = p_1^2 + k_2^2 - 2p_1k_2 + m^2 = -2p_1k_2 = 2\omega_2 m.$$

Тогда для $\hat{Q}$ имеем

$$\hat{Q} = \left[\hat{e}_1 \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}_2) - m}{\omega_2} \hat{e}_2 - \hat{e}_2 \frac{i(\hat{p}_1 + \hat{k}_1) - m}{\omega_1} \hat{e}_1\right]. \qquad (127,12)$$

Соответственно дифференциальное эффективное сечение равно

$$d\sigma = \frac{1}{4} r_0^2 \frac{\omega_2^2 E_2}{m\omega_1^2} \left|\bar{u}(\boldsymbol{p}_2)\hat{Q}u(\boldsymbol{p}_1)\right|^2 d\Omega, \qquad (127,13)$$

где $r_0 = \frac{e^2}{m}$ — классический радиус электрона.

Полученное выражение описывает процесс, в котором электрон и фотон в начальном и конечном состояниях имеют вполне определенную поляризацию. Если электроны в начальном состоянии не поляризованы, а поляризацией конечного состояния мы не интересуемся, то эффективное сечение должно быть усреднено по спиновым состояниям электрона в начальном состоянии и просуммировано по конечным спиновым состояниям. Следовательно мы должны определить величину

$$\overline{d\sigma} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma_2}\sum_{\sigma_1}\frac{1}{4} r_0^2 \frac{\omega_2^2 E_2}{m\omega_1^2}\left|\bar{u}_{\sigma_2}(\boldsymbol{p}_2)\hat{Q}u_{\sigma_1}(\boldsymbol{p}_1)\right|^2 d\Omega =$$

$$= \frac{1}{8} r_0^2 \frac{\omega_2^2 E_2}{m\omega_1^2} \sum_{\sigma_1,\sigma_2} \left(u_{\sigma_2}^+ \beta\hat{Q}u_{\sigma_1}\right)\left(u_{\sigma_1}^+ \hat{Q}^+ \beta u_{\sigma_2}\right), \qquad (127,14)$$

где u_{σ_1}, u_{σ_2} — состояния с определенной поляризацией. Например, $(\widehat{s\boldsymbol{p}_2})\, u_{\sigma_2} = \sigma_2 |\boldsymbol{p}_2| u_{\sigma_2}$, т. е. σ_2 — проекция спина на направление движения, $\hat{\sigma}_2 = \pm 1/2$. Оператор s определен в § 117.

Сумму по σ_1, входящую в (127,14), удобно переписать в виде

$$\sum_{\sigma_1}\left(u_{\sigma_2}^+\beta\hat{Q}u_{\sigma_1}\right)\left(u_{\sigma_1}^+\hat{Q}^+\beta u_{\sigma_2}\right) = \sum_{\sigma_1}\left(\sigma_2|\beta\hat{Q}|\sigma_1\right)\left(\sigma_1|\hat{Q}^+\beta|\sigma_2\right). \qquad (127,15)$$

Суммирование ведется по двум спиновым состояниям σ_1 с положительной энергией. Если бы суммирование проводилось и по состояниям с отрицательной энергией, т. е. по всем возможным состояниям (при данном импульсе), то выражение (127,15) существенно бы упростилось и представляло бы собой матричный элемент $(\sigma_2|\beta\hat{Q}\hat{Q}^+\beta|\sigma_2)$ [в соответствии с правилом перемножения матриц (45,6)].

Для того чтобы распространить суммирование на все четыре промежуточные состояния, в расчетах подобного типа применяется следующий вычислительный прием: вводится вспомогательный оператор $\hat{R}$, получивший название проекционного оператора

$$\hat{R} = \frac{\hat{H} + |E|}{2|E|} = \frac{\alpha\hat{p} + \beta m + |E|}{2|E|}. \qquad (127,16)$$

Действие этого оператора на функции u и v, отвечающие положительным и отрицательным энергиям, определяется равенствами

$$\frac{\hat{H} + |E|}{2|E|} u = u; \qquad \frac{\hat{H} + |E|}{2|E|} v = 0. \qquad (127,17)$$

Заменяя в формуле (127,15) функцию u_{σ_1} на функцию $\frac{\alpha\hat{p}_1 + \beta m + |E_1|}{2|E_1|} u_{\sigma_1}$, мы можем формально распространить суммирование и на состояния с отрицательной энергией, так как при наличии проекционного оператора последние, в соответствии с (127,17), не вносят никакого вклада в результат.

Вместо матриц α_k, β введем матрицы γ_μ:

$$\alpha_k = i\gamma_4\gamma_k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3),$$

$$\beta = \gamma_4.$$

Подставляя матрицы γ_μ в (127,16), получим

$$\hat{R} = -\frac{1}{2E}(i\gamma_\mu p_\mu - m)\gamma_4 = -\frac{1}{2E}(i\hat{p} - m)\gamma_4. \qquad (127,18)$$

Сумму (127,15) можно переписать в виде

$$\sum_{\sigma_1,\,E_1} \left(u^+_{\sigma_2}\gamma_4\hat{Q}\hat{R}_1 u_{\sigma_1}\right)\left(u^+_{\sigma_1}\hat{Q}^+\gamma_4 u_{\sigma_2}\right) = \left(u^+_{\sigma_2}\gamma_4\hat{Q}\hat{R}_1\hat{Q}^+\gamma_4 u_{\sigma_2}\right). \qquad (127,19)$$

Вычислим далее сумму по проекциям спина в конечном состоянии электрона σ_2. Здесь также удобно перейти к суммированию по всем четырем состояниям, введя проекционный оператор $\hat{R}_2$

$$S = \sum_{\sigma_2,\,E_2} \left(u^+_{\sigma_2}\gamma_4\hat{Q}\hat{R}_1\hat{Q}^+\gamma_4\hat{R}_2 u_{\sigma_2}\right). \qquad (127,20)$$

Суммирование ведется как по состояниям с положительной, так и по состояниям с отрицательной энергией. Мы видим, что выражение (127,20) представляет собой сумму диагональных матричных элементов, т. е.

$$S = \mathrm{Sp}\left(\gamma_4\hat{Q}\hat{R}_1\hat{Q}^+\gamma_4\hat{R}_2\right) = \mathrm{Sp}\left(\hat{Q}R_1\hat{Q}^+\gamma_4\hat{R}_2\gamma_4\right), \qquad (127,21)$$

так как под знаком Sp можно производить циклическую перестановку матриц, что легко непосредственно проверить. Подставляя это выражение в (127,14) и учитывая, что $\gamma_4^2 = 1$, $\hat{p}_1 = 0$, $E_1 = m$, получаем

$$d\sigma = \frac{1}{32} r_0^2 \frac{\omega_2^2}{m^2\omega_1^2} \mathrm{Sp}\left[\hat{Q}(i\hat{p}_1 - m)\gamma_4\hat{Q}^+\gamma_4(i\hat{p}_2 - m)\right]. \qquad (127,22)$$

Для любого оператора вида $\hat{A}$, у которого четвертая компонента является мнимой, а три — вещественными, выполняется следующее равенство:

$$\gamma_4 \hat{A}^+ \gamma_4 = -\hat{A}. \qquad (127{,}23)$$

Для произведения операторов соответственно имеем

$$\gamma_4 \hat{A}^+ \hat{B}^+ \hat{C}^+ \gamma_4 = \gamma_4 \hat{A}^+ \gamma_4 \gamma_4 \hat{B}^+ \gamma_4 \gamma_4 \hat{C}^+ \gamma_4 = (-\hat{A})(-\hat{B})(-\hat{C}). \qquad (127{,}24)$$

Тогда выражение $\gamma_4 \hat{Q}^+ \gamma_4$ перепишется в виде

$$\gamma_4 \left\{ \frac{1}{\omega_1} \hat{e}_1^+ \left[i\left(\hat{p}_1 + \hat{k}_1\right)^+ + m \right] \hat{e}_2^+ - \frac{1}{\omega_2} \hat{e}_2^+ \left[i\left(\hat{p}_1 - \hat{k}_2\right)^+ + m \right] \hat{e}_1^+ \right\} \gamma_4 =$$
$$= \left\{ \frac{1}{\omega_1} \hat{e}_1 \left[-i\left(\hat{p}_1 + \hat{k}_1\right) + m \right] \hat{e}_2 + \frac{1}{\omega_2} \hat{e}_2 \left[i\left(\hat{p}_1 - \hat{k}_2\right) - m \right] \hat{e}_1 \right\}. \qquad (127{,}25)$$

Просуммируем теперь эффективное сечение по конечным состояниям фотона и усредним по начальным состояниям. Чтобы вычислить эффективное сечение для случая, когда падающий фотон поляризован по оси *1*, а рассеянный — по оси *2*, в выражение (127,12) для $\hat{Q}$ следует подставить значения $\hat{e}_1 = \gamma_1$ и $\hat{e}_2 = \gamma_2$. Поскольку, однако, падающие фотоны не поляризованы, а поляризацией рассеянных фотонов мы не интересуемся, то следует вместо $\hat{e}_1$ подставить γ_ν, а вместо $\hat{e}_2$ подставить γ_μ и просуммировать по всем значениям индексов ν и μ. Тогда имеем

$$d\sigma = \frac{1}{32} r_0^2 \frac{\omega_2^2}{m^2 \omega_1^2} \operatorname{Sp} \left\{ \left[\frac{1}{\omega_2} \gamma_\nu \left(i\left(\hat{p}_1 - \hat{k}_2\right) - m \right) \gamma_\mu - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\omega_1} \gamma_\mu \left(i\left(\hat{p}_1 + \hat{k}_1\right) - m \right) \gamma_\nu \right] \left(i\hat{p}_1 - m \right) \left[\frac{1}{\omega_2} \gamma_\mu \left(i\left(\hat{p}_1 - \hat{k}_2\right) - m \right) \gamma_\nu - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{\omega_1} \gamma_\nu \left(i\left(\hat{p}_1 + \hat{k}_1\right) - m \right) \gamma_\mu \right] \left(i\hat{p}_2 - m \right) \right\}, \qquad (127{,}26)$$

причем по дважды повторяющимся индексам μ и ν проводится суммирование.

Хотя свободный фотон может быть поляризован по двум направлениям, перпендикулярным к направлению движения, суммирование по μ и ν фактически можно проводить по всем четырем значениям. Это связано с тем, что не существует реальных фотонов, поляризованных по направлению движения и по временно́й оси и их формальный учет не изменяет окончательного результата[1]).

[1]) См., например, А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, «Наука», 1969.

Соотношение (127,26) удобно переписать в виде

$$d\sigma = \frac{1}{32} r_0^2 \frac{\omega_2^2}{m^2\omega_1^2} (\mathrm{Sp}\, F_1 + \mathrm{Sp}\, F_2), \qquad (127,27)$$

где

$$F_1 = \left[\frac{1}{\omega_2} \gamma_\nu (i\hat{q}_2 - m) \gamma_\mu - \frac{1}{\omega_1} \gamma_\mu (i\hat{q}_1 - m) \gamma_\nu\right] (i\hat{p}_1 - m) \times$$

$$\times \left[\gamma_\mu \frac{1}{\omega_2} (i\hat{q}_2 - m) \gamma_\nu\right] (i\hat{p}_2 - m), \qquad (127,28)$$

$$q_1 = p_1 + k_1, \qquad q_2 = p_1 - k_2.$$

Выражение для F_2 получается из F_1 заменой

$$q_1 \to q_2, \quad q_2 \to q_1; \quad \omega_1 \to -\omega_2; \quad \omega_2 \to -\omega_1.$$

Для дальнейших расчетов удобно пользоваться формулами Фейнмана, которые легко проверяются непосредственным вычислением:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_\nu\gamma_\nu &= 4, \\ \gamma_\nu \hat{A} \gamma_\nu &= -2\hat{A}, \\ \gamma_\nu \hat{A}_1 \hat{A}_2 \gamma_\nu &= 4(A_1 A_2), \\ \gamma_\nu \hat{A}_1 \hat{A}_2 \hat{A}_3 \gamma_\nu &= -2\hat{A}_3 \hat{A}_2 \hat{A}_1. \end{aligned}\right\} \qquad (127,29)$$

Используя эти выражения, легко провести суммирование по μ и ν в (127,27).

Так, полагая $F_1 = F_1' + F_1''$, найдем:

$$\mathrm{Sp}\, F_1' = \mathrm{Sp}\left\{\gamma_\nu \frac{1}{\omega_2} (i\hat{q}_2 - m) \gamma_\mu (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\mu \frac{1}{\omega_2} (i\hat{q}_2 - m) \gamma_\nu (i\hat{p}_2 - m)\right\} =$$

$$= \mathrm{Sp}\left\{\frac{1}{\omega_2} (i\hat{q}_2 - m) \gamma_\mu (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\mu \frac{1}{\omega_2} (i\hat{q}_2 - m) \gamma_\nu (i\hat{p}_2 - m) \gamma_\nu\right\} =$$

$$= \frac{4}{\omega_2^2} \mathrm{Sp}\, \{i\hat{q}_2 - m)(i\hat{p}_1 + 2m)(i\hat{q}_2 - m)(i\hat{p}_2 + 2m)\}, \qquad (127,30)$$

$$\mathrm{Sp}\, F_1'' = -\mathrm{Sp}\left\{\gamma_\mu \frac{1}{\omega_1} (i\hat{q}_1 - m) \gamma_\nu (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\mu \frac{1}{\omega_2} (i\hat{q}_2 - m) \gamma_\nu (i\hat{p}_2 - m)\right\} =$$

$$= -\frac{4}{\omega_1\omega_2} \mathrm{Sp}\, \{[2i(q_1 q_2)\hat{p}_1 + m\hat{q}_2\hat{p}_1 - im\hat{q}_2(i\hat{q}_1 - m) -$$

$$- im\hat{p}_1(i\hat{q}_1 - m) + m^2(i\hat{q}_1 + 2m)](i\hat{p}_2 - m)\}. \qquad (127,31)$$

При вычислении шпуров нужно пользоваться следующими правилами:

1) шпур от произведения нечетного числа векторов $\hat{A}$ равен нулю;

2) шпур от скалярной величины равен ее учетверенному значению;

3) $\mathrm{Sp}\,\hat{A}_1\hat{A}_2 = 4(A_1A_2)$;

4) $\mathrm{Sp}\,\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3\hat{A}_4 = 4\{(A_1A_2)(A_3A_4) + (A_1A_4)(A_2A_3) - (A_1A_3)(A_2A_4)\}$. (127,32)

Первые два правила тривиальны. Правило 3) и 4) легко доказать, используя тождество

$$\hat{A}_1\hat{A}_2 + \hat{A}_2\hat{A}_1 = 2(A_1A_2). \qquad (127,33)$$

Если от левой и правой частей взять шпур и провести под знаком шпура циклическую перестановку векторов $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$, то сразу получим правило 3). Найдем шпур $\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3\hat{A}_4$. Пользуясь приведенным тождеством (127,33), имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\,\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3\hat{A}_4 &= -\mathrm{Sp}\,\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_4\hat{A}_3 + 2\,\mathrm{Sp}\,\hat{A}_1\hat{A}_2(A_3A_4) = \\ &= \mathrm{Sp}\,\hat{A}_1\hat{A}_4\hat{A}_2\hat{A}_3 - 2\,\mathrm{Sp}(A_2A_4)\hat{A}_1\hat{A}_3 + 8(A_1A_2)(A_3A_4) = \\ &= -\mathrm{Sp}\,\hat{A}_4\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3 + 2\,\mathrm{Sp}\,\hat{A}_2\hat{A}_3(A_1A_4) - 8(A_2A_4)(A_1A_3) + 8(A_1A_2)(A_3A_4) = \\ &= -\mathrm{Sp}\,\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3\hat{A}_4 + 8(A_2A_3)(A_1A_4) - 8(A_2A_4)(A_1A_3) + 8(A_1A_2)(A_3A_4).\end{aligned}$$

Из этого равенства получаем правило 4).

С помощью сформулированных правил находим:

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\,F_1' &= \frac{16}{\omega_2^2}\{2(q_2p_1)(q_2p_2) - (q_2^2 + m^2)(p_1p_2) + 4m^2(q_2p_1) - \\ &\qquad - 4m^2q_2^2 + 4m^2(q_2p_2) + 4m^4\}, \\ \mathrm{Sp}\,F_1'' &= \frac{16}{\omega_1\omega_2}\{2(q_1q_2)(p_1p_2) + m^2(q_2p_1) + m^2(q_2q_1) + m^2(q_2p_2) + \\ &\qquad + m^2(q_1p_1) + m^2(p_1p_2) + m^2(q_1p_2) + 2m^4\}. \qquad (127,34)\end{aligned}$$

Производя указанную выше замену, получаем из этих выражений $\mathrm{Sp}\,F_2$.

Выполняя необходимые преобразования, после нескольких длинных, но простых вычислений приходим к известной формуле Клейна — Нишины:

$$d\sigma = \frac{1}{2}r_0^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - \sin^2\vartheta\right)d\Omega, \qquad (127,35)$$

которая играет важную роль в приложениях.

При малых энергиях фотона $\omega_1 \ll m$, $\omega_2 = \omega_1$ [см. (127,6)] и формула (127,35) в пределе сводится к классической формуле Томсона

$$d\sigma = \frac{1}{2}r_0^2(1 + \cos^2\vartheta)\,d\Omega,$$

полученной в § 36, ч. I.