§ 128. Смещение термов атома водорода под влиянием поля вакуума (лэмбовское смещение)

Важность расчетной методики Фейнмана не сводится, разумеется, к упрощению и стандартизации вычислений.

Как мы указывали уже в § 124, формализм Фейнмана позволил в наглядной форме получить решение ряда важных задач квантовой электродинамики. К ним относится, в частности, упомянутое выше лэмбовское смещение атомных термов.

Явление лэмбовского смещения дает весьма наглядную иллюстрацию правильности тех представлений, которые были положены в основу квантовой теории излучения и теории позитрона. В квантовой теории излучения принималось, что в пустом пространстве, вакууме, имеется электромагнитное поле. Это то поле, которое отвечает нулевым колебаниям осцилляторов поля. Часто говорят, что совокупность осцилляторов электромагнитного поля, находящихся в состояниях с нулевой энергией, представляет «электромагнитный вакуум». В электромагнитном вакууме, отвечающем состоянию поля с наименьшей энергией, имеется некоторая, отличная от нуля напряженность поля. Точнее говоря, средние (по времени) значения квадратов напряженности полей $(\mathscr{E})^2$ и $(\mathscr{H})^2$ отличны от нуля.

Существование поля вакуума не сказывалось на явлениях излучения, поглощения и рассеяния, которые были рассмотрены в гл. XIII. Все эти явления были связаны с переходами осцилляторов поля из невозбужденных (нулевых) состояний в возбужденные и обратно. Поэтому в течение ряда лет свойства электромагнитного вакуума не были связаны с непосредственно наблюдавшимися явлениями.

В теории позитронов предполагается, что наряду с электромагнитным вакуумом существует электронно-позитронный вакуум, или фон заполненных состояний с отрицательными энергиями, о котором подробно было сказано в § 116. Оказывается, что существование электромагнитного и электронно-позитронного вакуума непосредственно проявляется не только в процессах, происходящих при больших энергиях (например, в комптон-эффекте или в процессе образования пар), но и в особенностях поведения микрочастиц при малых энергиях, в частности в явлении лэмбовского смещения. Явление лэмбовского смещения может быть исследовано строго с помощью формализма Фейнмана. Оказывается, однако, что этот эффект можно обсудить и без привлечения сравнительно сложного расчетного аппарата, на основе простых и наглядных соображений [1]).

[1]) См. статью Т. Велтона, Phys. Rev. 74, 1157 (1948); русский перевод см. в сборнике «Вопросы причинности в квантовой механике», ИЛ, 1955.

Для этого прежде всего обсудим вопрос о том, какое значение может иметь среднеквадратичное значение напряженности поля в произвольной точке вакуума.

Для вычисления среднеквадратичной напряженности поля в вакууме рассмотрим нормировочный объем V_0. Нулевое колебание с частотой ω имеет энергию $\frac{\hbar\omega}{2}$. Можно написать очевидное равенство

$$\frac{\hbar\omega}{2}=\frac{1}{8\pi}\overline{\int\left(\mathscr{E}_{0\omega}^2+\mathscr{H}_{0\omega}^2\right)dV}=\frac{1}{4\pi}\overline{\int\mathscr{E}_{0\omega}^2 dV}=\frac{\mathscr{E}_{0\omega}^2 V_0}{8\pi}, \qquad (128,1)$$

где $\mathscr{E}_{0\omega}$ и $\mathscr{H}_{0\omega}$ — амплитуды напряженностей поля в вакууме, отвечающего нулевым колебаниям с частотой ω; черта означает усреднение по периоду колебания. Равенство (128,1) позволяет найти среднеквадратичную амплитуду нулевых колебаний поля с частотой ω:

$$\mathscr{E}_{0\omega}^2=\frac{4\pi\hbar\omega}{V_0}. \qquad (128,2)$$

Рассмотрим электрон в атоме водорода. На этот электрон действует кулоновское поле ядра и флуктуации нулевого поля вакуума. Поэтому на орбитальное движение электрона будет налагаться хаотическое движение под действием поля вакуума.

Пусть $U(\boldsymbol{r})$ означает потенциальную энергию электрона, находящегося в точке $\boldsymbol{r}$. Предположим теперь, что координату электрона можно написать как $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}'$, где $\boldsymbol{r}_0$ — обычное значение координаты электрона, плавно изменяющееся при его орбитальном движении, и $\boldsymbol{r}'$ — его малое смещение под действием случайной силы — флуктуирующего поля. Тогда изменение средней потенциальной энергии электрона, испытывающего случайные смещения, может быть представлено в виде

$$\langle\Delta U\rangle=\langle U(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}')-U(\boldsymbol{r}_0)\rangle\simeq\left\langle x_i'\frac{\partial U}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\left(x_i'x_k'\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\,\partial x_k}\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{2}\nabla^2 U\left\langle(x_i')^2\right\rangle=\frac{1}{6}(\nabla^2 U)\left\langle(\boldsymbol{r}')^2\right\rangle. \qquad (128,3)$$

Здесь скобки $\langle\ \rangle$ означают среднее по всевозможным значениям случайной величины $\boldsymbol{r}'$. При усреднении мы учли, что $\langle x_i'\rangle=0$, а в силу пространственной изотропии случайных смещений

$$\left\langle x_i'x_k'\right\rangle=\frac{1}{3}\langle(\boldsymbol{r}')^2\rangle.$$

Значение потенциальной энергии в множителе ∇^2 берется, очевидно, при значении $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$.

Потенциальная энергия электрона в атоме без возмущения со стороны поля вакуума не зависит от состояния последнего и знак в ней опущен.

В кулоновском поле прото́на для $\nabla^2 U(\boldsymbol{r}_0)$ можно написать

$$\nabla^2 U(\boldsymbol{r}_0) = 4\pi e^2 \delta(\boldsymbol{r}_0),$$

так что

$$\langle U \rangle = U(\boldsymbol{r}_0) + \frac{2\pi e^2}{3} \delta(\boldsymbol{r}_0) \langle \boldsymbol{r}'^2 \rangle. \tag{128,4}$$

Для получения смещения атомного терма мы должны взять среднее значение от (128,4) по состоянию электрона в атоме. Тогда имеем

$$\Delta E_{\text{лэмб}} = \overline{\langle U \rangle - U(\boldsymbol{r}_0)} = \overline{\langle \Delta U \rangle} = \\ = \frac{2\pi}{3} e^2 \int \delta(\boldsymbol{r}_0) |\psi_n(\boldsymbol{r}_0)|^2 \langle \boldsymbol{r}'^2 \rangle \, dV_0, \tag{128,5}$$

где ψ_n — волновая функция электрона в атоме. Пользуясь свойством δ-функции, находим

$$\Delta E_{\text{лэмб}} = \overline{\langle \Delta U \rangle} = \frac{2\pi}{3} e^2 |\psi_n(0)|^2 \langle \boldsymbol{r}'^2 \rangle. \tag{128,6}$$

Вычисление $\langle \boldsymbol{r}'^2 \rangle$ среднего квадратичного смещения электрона под действием нулевых колебаний поля может быть выполнено сравнительно просто, если учитывать лишь относительно низкие частоты колебаний поля.

Будем считать, что смещение электрона под действием поля происходит независимо от орбитального движения. Не учитывая релятивистских эффектов, можно написать уравнения движения в виде

$$m \frac{d^2 \boldsymbol{r}'_\omega}{dt^2} = e \mathscr{E}_{0\omega} \sin(\boldsymbol{kr} - \omega t),$$

откуда

$$\boldsymbol{r}'_\omega = -\frac{e \mathscr{E}_{0\omega}}{m\omega^2} \sin(\boldsymbol{kr} - \omega t)$$

и соответственно

$$\overline{\langle (\boldsymbol{r}'_\omega)^2 \rangle} = \frac{e^2}{2m^2\omega^4} \mathscr{E}^2_{0\omega} = \frac{2\pi e^2 \hbar}{m^2 \omega^3 V_0}, \tag{128,7}$$

где черта означает усреднение по времени. Здесь $\boldsymbol{r}'_\omega$ означает смещение под действием нулевых колебаний поля с частотой ω.

Так как нулевые колебания с разными частотами являются независимыми, их вклад в полное среднеквадратичное смещение электрона находится простым суммированием. Мы можем, следовательно, написать для полного среднеквадратичного смещения выражение

$$\langle \boldsymbol{r}'^2 \rangle = \int \overline{\langle (\boldsymbol{r}'_\omega)^2 \rangle} \frac{\omega^2 \, d\omega V_0}{\pi^2 c^3} = \frac{2e^2 \hbar}{\pi c^3 m^2} \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{d\omega}{\omega}, \tag{128,7'}$$

где интегрирование ведется по всевозможным частотам нулевых колебаний.

Если бы не существовало электронно-позитронного вакуума, то частоты нулевых колебаний поля могли бы принимать как угодно большие значения и полученная формула не имела бы никакого смысла.

Оказывается, однако, что при частотах больших, чем минимальная частота рождения пар $\omega_1 = \frac{2mc^2}{\hbar}$, возникает взаимодействие между нулевыми колебаниями поля и заполненным фоном отрицательных энергий (электромагнитным и электронно-позитронным вакуумом). Это взаимодействие наглядно можно представить себе как взаимодействие между флуктуациями «тока», связанного со случайным смещением электрона с положительной энергией и флуктуациями «токов», связанных со случайными смещениями электронов фона заполненных состояний, вызванных действием нулевых колебаний электромагнитного вакуума. Поскольку в силу принципа Паули все электроны стремятся находиться в удалении друг от друга (ср. § 67), оказывается, что флуктуации электронов фона находятся в противоположной фазе по отношению к флуктуациям электрона с положительной энергией. В результате происходит их взаимное погашение, и среднеквадратичное смещение электрона оказывается значительно меньшим, чем даваемое формулой (128,7). Упрощая истинное положение вещей, можно сказать, что при частотах больших ω_1 среднеквадратичное смещение электрона обращается в нуль.

Поэтому в качестве верхнего предела интегрирования в (128,7′) по частотам поля следует выбрать величину $\omega_{max} = \omega_1$. При определении минимальной частоты ω_{min} нужно учесть, что рассматриваемый нами электрон не является свободным, но связан в атоме.

Частота ω_{min} по порядку величины равна ридберговской частоте электрона в водородном атоме, т. е.

$$\omega_{min} = \omega_0 = 2\pi R = \frac{me^4}{2\hbar^3},$$

где R — постоянная Ридберга, равная $\frac{|E_0|}{2\pi\hbar}$, E_0 — энергия основного состояния атома. Пользуясь этими выражениями для ω_{min} и ω_{max}, находим

$$\langle r'^2 \rangle = \frac{2e^2\hbar}{\pi c^3 m^2} \ln \frac{2mc^2}{\hbar\omega_0} = \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \ln \frac{2mc^2}{\hbar\omega_0} \qquad (128,8)$$

и для сдвига терма находим

$$\Delta E_{\text{лэмб}} = \frac{4}{3} \frac{e^4}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 |\psi_n(0)|^2 \ln \frac{2mc^2}{\hbar\omega_0}. \qquad (128,9)$$

Формула (128,9) показывает, что сдвиг уровней электрона в атоме водорода, связанный с воздействием на него вакуума, имеет место только в s-состоянии. Действительно, только в s-состоянии величина $|\psi_n(0)|^2$ отлична от нуля. Это сдвиг всегда положителен — уровень в s-состоянии должен лежать выше, чем определенный по формуле (119,2).

Вычисление $\Delta E_{\text{лэмб}}$ имеет абсолютный характер, и его числовое значение (с некоторыми дополнительными поправками, не учтенными в приведенном упрощенном выводе) оказывается равным 1057,19 *Мгц*. Опытное значение этой величины оказалось равным $1057{,}77 \pm 0{,}1$ *Мгц*. Идеальное совпадение рассчитанного и измеренного значения лэмбовского смещения является наглядным подтверждением развитых общих представлений о реальности «вакуума».

Совершенно аналогичные расчеты, на которых мы не останавливаемся, позволили найти упомянутую выше поправку к магнитному моменту электрона (см. цитированную статью Велтона). Особенно важным было решение в квантовой электродинамике ряда принципиальных проблем. Удалось построить количественную теорию, позволяющую с любой степенью точности рассчитывать вероятности всевозможных процессов связанных с взаимодействием электронов между собой и с электромагнитным полем.

Принципиальные трудности теории, связанные с расходящимися выражениями, например часто упоминавшаяся трудность обращения в бесконечность собственной массы (или энергии) электрона, удалось до известной степени устранить. В выражениях для собственной энергии частицы и сходных с ним соотношений удалось выделить конечные наблюдаемые величины, тогда как расходящимися выражениями описываются лишь принципиально не наблюдаемые величины.

Эта процедура, получившая название перенормировки, не может быть здесь проведена, и мы отсылаем читателя к специальной литературе, например неоднократно цитированным монографиям С. Швебера, Г. Бете, Ф. Гофмана или А. И. Ахиезера и В. Б. Берестецкого.