§ 131. Группы симметрии в квантовой механике

Мы уже подчеркивали, что сколько-нибудь последовательная и законченная теория сильных взаимодействий до сих пор не разработана. В частности, не сформулированы динамические уравнения, описывающие поведение частиц при сильном взаимодействии. Поэтому особую роль приобретает изучение общих свойств симметрии сильных взаимодействий, что позволяет дать удовлетворительную классификацию адронов и получить ряд количественных соотношений.

В § 129 указывалось, что все адроны распадаются на небольшие семейства, изомультиплеты, которым можно приписать определенные значения изоспина T. Члены данного мультиплета различаются проекцией T_3 изоспина, определяющей величину электрического заряда, и при «выключенном» электромагнитном взаимодействии имеют строго одинаковые массы. В сильных взаимодействиях квантовые числа T и T_3 сохраняются.

С аналогичной ситуацией мы уже неоднократно встречались. Например, при движении нерелятивистской частицы в центральном поле ее возможные состояния также группируются в определенные семейства, которые характеризуются различными значениями углового момента J. Волновые функции, принадлежащие одному семейству, различаются проекцией момента J_3 и соответствуют одной и той же энергии, т. е. образуют вырожденный энергетический уровень. При движении частицы квантовые числа J и J_3 сохраняются.

Для всех подобных случаев характерна инвариантность теории относительно определенного класса преобразований в реальном или в некотором фиктивном пространстве (в нашем квантовомеханическом примере — относительно пространственных вращений). Их совокупность является замкнутой, т. е. последовательное применение допустимых преобразований приводит снова к допустимому преобразованию. Кроме того, имеется единичное преобразование и каждому преобразованию соответствует обратное. Таким образом, преобразования инвариантности (симметрии) образуют *группу*. Ее элементы будут обозначаться через g, а последовательное применение двух преобразований g_1 и g_2 будет записываться в виде произведения g_2g_1 (именно в таком порядке). Легко видеть, что все пространственные вращения образуют группу — трехмерную группу вращений, обозначаемую как SO(3). Другим примером группы может служить совокупность преобразований Лоренца.

Понятие инвариантности теории относительно данной группы преобразований включает два аспекта: определенные трансформационные свойства волновых функций ψ и определенные трансформационные свойства гамильтониана $\hat{H}$.

Относительно групповых преобразований g все гильбертово пространство волновых функций разбивается на инвариантные подпространства, т. е. существуют семейства волновых функций, которые по определенному закону преобразуются только друг через друга:

$$\psi' = u(g)\psi. \tag{131,1}$$

Требуется, чтобы произведению g_2g_1 элементов группы соответствовало произведение операторов $u(g)$:

$$u(g_2g_1) = u(g_2)\,u(g_1). \tag{131,2}$$

В этом случае говорят, что совокупность операторов $u(g)$ образует *представление* данной группы. Размерность подпространства (максимальное число линейно независимых волновых функций), в котором действуют эти операторы, называется *размерностью* данного *представления*. Если инвариантное подпространство не содержит инвариантных подпространств меньшей размерности, то говорят о *неприводимом* представлении. В противном случае представление называется *приводимым*. Совокупность волновых функций, преобразующихся по неприводимому представлению группы симметрии, в дальнейшем мы будем называть *мультиплетом*.

Из теории момента количества движения известно, что при пространственных вращениях сферические функции $Y_J^{J_3}(\theta, \varphi)$, соответствующие заданному моменту J и всевозможным его проекциям J_3, преобразуются только друг через друга. Им соответствует неприводимое представление размерности $2J+1$ группы $SO(3)$, т. е. все сферические функции, соответствующие моменту J, образуют $2J+1$-мерный мультиплет группы вращений.

Рассмотрим требования, которые в инвариантной теории накладываются на трансформационные свойства гамильтониана. Подействуем на уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \tag{131,3}$$

оператором $u(g)$ представления, по которому преобразуется волновая функция ψ. Предполагая, что $u(g)$ коммутирует с оператором $\partial/\partial t$ (анализ более общего случая нам не потребуется) получим

$$i\hbar\frac{\partial(u\psi)}{\partial t} = u\hat{H}u^{-1}u\psi$$

или

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = u\hat{H}u^{-1}\psi'. \tag{131,4}$$

Инвариантность теории означает тождественность формы уравнения Шредингера для исходной ψ и преобразованной ψ' волновых функций, откуда

$$\hat{H} = u\hat{H}u^{-1}$$

или

$$[H, u(g)] = 0. \tag{131,5}$$

Таким образом, требование инвариантности теории относительно преобразований из некоторой группы приводит к коммутативности гамильтониана со всеми операторами представлений этой группы.

Ниже будут рассматриваться лишь так называемые *группы Ли*, элементы которых являются однозначными дифференцируемыми функциями конечного числа действительных параметров. Последние выбираются так, чтобы их нулевым значениям соответствовал единичный элемент. Таким образом, для группы *Ли*

$$g = g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n); \qquad g(0, \ldots, 0) = I. \tag{131,6}$$

Число n всех независимых действительных параметров группы Ли называется ее *размерностью.* Если преобразование g бесконечно мало отличается от единичного, т. е. является *инфинитезимальным*, то ему соответствуют бесконечно малые значения параметров α_k. В этом случае, учитывая (131,6), можно написать так:

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cong I + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left.\frac{\partial g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_k}\right|_{\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0} \equiv I + i\sum_{k=1}^{n} \alpha_k I_k. \tag{131,7}$$

Величины

$$I_k = -i \left.\frac{\partial g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_k}\right|_{\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0} \tag{131,8}$$

(множитель $-i$ вводится для удобства), называемые *генераторами группы*, представляют собой квадратные матрицы, порядок которых равен размерности пространства, в котором действуют групповые преобразования. Генераторами группы вращений являются 3-рядные матрицы J_x, J_y, J_z, приведенные в (51,17). Чтобы в этом убедиться, достаточно взять матрицы конечных поворотов вокруг соответствующих осей координат и воспользоваться определением (131,8).

Операторы $u(g)$ представления группы Ли зависят, очевидно, от тех же параметров α_k. Учитывая, что единичному элементу группы соответствует единичный оператор представления, можно записать

$$u(g) = u(\alpha_1, \ldots, \alpha_n); \qquad u(0, \ldots, 0) = I. \tag{131,9}$$

Операторы представления размерности N, соответствующие инфинитезимальным преобразованиям, имеют вид

$$u(g) \cong I + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left. \frac{\partial u(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_k} \right|_{\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0} \equiv I + i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k. \quad (131,10)$$

При этом величины

$$L_k = -i \left. \frac{\partial u(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_k} \right|_{\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0}, \quad (131,11)$$

называемые *генераторами представления*, являются N-рядными квадратными матрицами. Для группы вращений таковыми с точностью до множителя $\hbar/2$ являются операторы $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$, $\hat{J}_z$ проекций момента. В частности, генераторы спинорного представления совпадают с матрицами Паули [см. (61,13)]. Можно показать, что операторы $u(g)$ данного представления, соответствующие *конечным* преобразованиям, имеют вид

$$u(g) = \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k\right) \quad (131,12)$$

[ср., например, формулы (61,13) и (61,12)].

В § 46 мы видели, что физическое содержание теории не изменяется лишь при унитарных преобразованиях волновых функций, что выделяет из множества всех представлений очень важный класс *унитарных представлений*, для которых

$$u^+ u = u u^+ = I. \quad (131,13)$$

Из (131,13) и (131,10) имеем

$$I = u^+ u \cong \left(I - i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k^+\right)\left(I + i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k\right) \cong I + i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(L_k - L_k^+\right),$$

откуда

$$L_k^+ = L_k, \quad (131,14)$$

т. е. генераторы унитарного представления являются эрмитовыми матрицами. Поэтому для инфинитезимальных преобразований

$$u(g) \cong I + i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k; \quad u^+(g) = u^{-1}(g) \cong I - i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k. \quad (131,15)$$

Отметим еще, что для групп Ли соотношение (131,5), справедливое в инвариантной теории, эквивалентно, очевидно, условию

$$[\hat{H}, L_k] = 0. \quad (131,16)$$

Важность изучения групп симметрии в квантовой механике обусловлена тем, что при их наличии справедливы следующие результаты.

1. Существуют эрмитовы взаимно коммутирующие комбинации генераторов представления, которые коммутируют и с ними. Они называются *инвариантными операторами*, и их основным свойством является то, что на данном мультиплете эти операторы кратны единичному (лемма Шура). Это означает, что все волновые функции одного мультиплета являются собственными функциями любого инвариантного оператора с одним и тем же собственным значением. Таким образом, возникает естественный набор квантовых чисел, число которых равно числу инвариантных операторов, характеризующих мультиплет в целом. В группе вращений имеется один инвариантный оператор $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$, так что в этом случае каждый мультиплет характеризуется значением момента J.

2. Среди генераторов представления может быть несколько взаимно коммутирующих. Их число определяется свойствами группы и называется ее *рангом*. Базисные функции мультиплета можно выбрать так, чтобы они были собственными функциями этих генераторов. Соответствующие собственные значения являются квантовыми числами, классифицирующими волновые функции, принадлежащие данному мультиплету. В группе вращений нет взаимно коммутирующих генераторов, т. е. ее ранг равен 1. Поэтому волновым функциям с данным моментом можно приписать еще лишь одно квантовое число, например, значение проекции J_3.

3. Описанные генераторы и инвариантные операторы образуют набор эрмитовых операторов, которые коммутируют друг с другом и с гамильтонианом [см. (131,16)]. Поэтому им соответствуют сохраняющиеся и одновременно измеримые физические величины. Следствием инвариантности теории относительно пространственных вращений является сохранение момента J и его проекции J_3.

4. Из сказанного следует, что если волновая функция начального состояния системы принадлежит некоторому мультиплету, то в результате реакции (рассеяния или распада) система перейдет в новое состояние, волновая функция которого будет принадлежать тому же мультиплету. Это устанавливает определенные правила отбора для реакций.

5. Из (131,16) и леммы Шура следует, что собственные значения гамильтониана (значения энергии или массы элементарных частиц) для волновых функций одного мультиплета одинаковы. Это объясняет наличие вырождения и позволяет установить его кратность, которая равна размерности мультиплета. В теории, инвариантной относительно группы вращений, имеет место вырождение по J_3, причем его кратность равна $2J + 1$.