§ 132. Изогруппа $SU(2)$ и ее представления

Существование адронных мультиплетов с описанными выше свойствами наводит на мысль, что сильное взаимодействие элементарных частиц инвариантно относительно некоторой группы преобразований. Оказалось, что ею является группа $SU(2)$, которая в дальнейшем будет называться *изогруппой*. С математической точки зрения она тесно связана (почти эквивалентна) с группой вращений $SO(3)$.

Группой $SU(2)$ называется совокупность всех унитарных и унимодулярных (детерминант равен 1) матриц второго порядка:

$$g^+g = gg^+ = I; \qquad \det g = 1. \tag{132,1}$$

Унитарные матрицы второго порядка допускают полезную геометрическую интерпретацию. Возьмем 2-мерное комплексное пространство векторов x, которые будем записывать в виде столбцов, и введем эрмитово сопряженные векторы x^+:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \qquad x^+ = (x_1^*, x_2^*) \equiv (x^1, x^2). \tag{132,2}$$

Рассмотрим в этом пространстве линейное преобразование

$$x' = gx \quad \text{или} \quad x'_i = g_i^j x_j \tag{132,3}$$

(верхний индекс нумерует столбец, нижний — строку, они пробегают значения 1, 2, причем по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Унитарные матрицы второго порядка соответствуют матрицам преобразований (132,3), которые не изменяют квадратичную форму

$$x^+x = x^i x_i = x_1^* x_1 + x_2^* x_2. \tag{132,4}$$

Согласно § 3 инфинитезимальную матрицу g можно записать как

$$g \cong I + i\varepsilon_\alpha \tau_\alpha. \tag{132,5}$$

Здесь τ_α — генераторы группы $SU(2)$, а ε_α — ее параметры, число n которых (размерность группы) подлежит определению. Требование унитарности матриц g приводит к эрмитовости ее генераторов τ_α. Замечая, что с точностью до членов второго порядка малости по ε_α, для инфинитезимальной матрицы (132,5)

$$1 = \det g \cong 1 + i\varepsilon_\alpha \operatorname{Sp} \tau_\alpha,$$

приходим к выводу, что след генераторов τ_α равен нулю. Таким образом, они являются 2-рядными квадратными матрицами со свойствами

$$\tau_\alpha^+ = \tau_\alpha; \qquad \mathrm{Sp}\,\tau_\alpha = 0. \tag{132,6}$$

На восемь действительных параметров комплексной 2-рядной матрицы эти ограничения накладывают пять (4 плюс 1) условий. Поэтому существуют три независимые матрицы со свойствами (132,6), что и определяет размерность группы $SU(2)$. В качестве ее генераторов можно взять матрицы Паули, которые эрмитовы и обладают нулевым следом:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{132,7}$$

Среди них нет взаимно коммутирующих, так что ранг $SU(2)$ равен 1. Сумма квадратов матриц Паули коммутирует с каждой из них:

$$[\tau^2, \tau_\alpha] = 0, \qquad \text{где} \qquad \tau^2 \equiv \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2. \tag{132,8}$$

Перейдем теперь к построению представлений группы $SU(2)$.

1. Простейшим является тривиальное представление. Его мультиплеты одномерны, т. е. содержат по одной волновой функции φ, которая не меняется при преобразовании (132,3):

$$\varphi' = \varphi. \tag{132,9}$$

Размерность этого представления равна 1, а его генераторами служат числа 0. Такое представление называется скалярным, а φ — *скаляром.*

2. Рассмотрим 2-мерное пространство векторов φ_i, которые преобразуются по тому же закону, что и векторы x:

$$'\varphi_i = g_i^j \varphi_j \quad \text{или} \quad '\varphi_i \cong \left(I + i\varepsilon_\alpha \tau_\alpha\right)_i^j \varphi_j. \tag{132,10}$$

В результате возникают мультиплеты разномерности 2, члены которых преобразуются по представлению той же размерности. Из (132,10) следует, что его генераторами являются сами матрицы τ_α:

$$(L_\alpha)_i^j = (\tau_\alpha)_i^j. \tag{132,11}$$

Это представление называется спинорным, а величины φ_i — *спинором* (ср. с формализмом, изложенным в гл. VIII).

3. Возьмем две величины φ^i, которые преобразуются так же, как компоненты вектора x^+:

$$'\varphi^i = (g^+)_j^i \varphi^j \quad \text{или} \quad '\varphi^i \cong (I - i\varepsilon_\alpha \tau_\alpha)_j^i \varphi^j. \tag{132,12}$$

В результате получим 2-мерное представление, которое называется *сопряженным* к спинорному. Его генераторами служат матрицы

$$(L_\alpha)_i^j = -(\tau_\alpha)_i^j. \tag{132,13}$$

В действительности это представление эквивалентно спинорному, т. е. из величин φ^i можно образовать линейные комбинации, преобразующиеся по закону (132,10). Но его введение весьма удобно с формальной точки зрения.

4. Все остальные представления можно построить из спинорного и сопряженного ему. Рассмотрим совокупность $2(p+q)$ величин $\varphi_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$, которые преобразуются как произведение p спиноров и q сопряженных спиноров, т. е. по закону

$$'\varphi_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} = g_{i_1}^{i'_1} \ldots g_{i_p}^{i'_p} (g^+)_{j'_1}^{j_1} \ldots (g^+)_{j'_q}^{j_q} \varphi_{i'_1 \ldots i'_p}^{j'_1 \ldots j'_q}. \tag{132,14}$$

Для инфинитезимального преобразования имеем

$$'\varphi_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \cong \left(I + i\varepsilon_{\alpha_1}\tau_{\alpha_1}\right)_{i_1}^{i'_1} \ldots \left(I + i\varepsilon_{\alpha_p}\tau_{\alpha_p}\right)_{i_p}^{i'_p} \left(I - i\varepsilon_{\beta_1}\tau_{\beta_1}\right)_{j'_1}^{j_1} \ldots$$

$$\ldots \left(I - i\varepsilon_{\beta_q}\tau_{\beta_q}\right)_{j'_q}^{j_q} \varphi_{i'_1 \ldots i'_q}^{j'_1 \ldots j'_q}, \tag{132,15}$$

так что генераторы этого представления имеют вид

$$(L_\alpha)_{i_1 \ldots i_p, j'_1 \ldots j'_q}^{i'_1 \ldots i'_p, j_1 \ldots j_q} = \sum_{s=1}^{p} \delta_{i_1}^{i'_1} \ldots \delta_{i_{s-1}}^{i'_{s-1}} (\tau_\alpha)_{i_s}^{i'_s} \delta_{i_{s+1}}^{i'_{s+1}} \ldots \delta_{i_p}^{i'_p} \delta_{j'_1}^{j_1} \ldots \delta_{j'_q}^{j_q} -$$

$$- \sum_{s=1}^{q} \delta_{i_1}^{i'_1} \ldots \delta_{i_p}^{i'_p} \delta_{j'_1}^{j_1} \ldots \delta_{j'_{s-1}}^{j_{s-1}} (\tau_\alpha)_{j'_s}^{j_s} \delta_{j'_{s+1}}^{j_{s+1}} \ldots \delta_{j'_q}^{j_q}. \tag{132,16}$$

Полученное таким способом представление называется прямым произведением p спинорных и q сопряженных ему представлений. Символически

$$\underbrace{(1,\ 0) \otimes \ldots \otimes (1,\ 0) \otimes}_{p \text{ раз}} \quad \underbrace{(0,\ 1) \otimes \ldots \otimes (0,\ 1)}_{q \text{ раз}}$$

(обозначения очевидны).

Если функция $\varphi_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ симметрична по какой-то паре нижних (или верхних) индексов, то при преобразовании (132,13) это свойство сохраняется. Кроме того, неизменность квадратичной формы (132,4) приводит к сохранению свертки по любой паре верхнего и нижнего индекса, т. е. величины типа $\varphi_{\ldots i \ldots}^{\ldots i \ldots}$. Поэтому набор всех функций $\varphi_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ распадается на отдельные мультиплеты, члены которых преобразуются только друг через друга, т. е. построенное представление является приводимым. В данном случае условие неприводимости сводится к тому, что $\varphi^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$ должны быть симметричными отдельно по всем нижним и верхним индексам, причем свертка по любой паре нижнего и верхнего индекса обязана обращаться в нуль. Легко подсчитать число независимых величин $\varphi^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$ такого типа, т. е. определить размерность соответствующего неприводимого представления. Общее число нижних (верхних) индексов, равных 1, может меняться от 0 до p (до q), при этом остальные индексы равны 2. При условии симметрии порядок следования индексов безразличен, так что число различных полностью симметричных величин $\varphi^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$ равно $(p+1)(q+1)$. Равенство нулю сверток накладывает на них pq условий, так что всего имеется

$$N = (p+1)(q+1) - pq = p + q + 1$$

независимых компонент. Описанное неприводимое представление будет обозначаться символом (p, q), а его размерность — $N(p, q)$. Имеем

$$N(p, q) = p + q + 1. \tag{132,17}$$

Подчеркнем еще раз, что верхние и нижние индексы эквивалентны, так что неприводимое представление определяется, по существу, полным числом индексов, которое равно $p + q$.

Рассмотрим важный для дальнейшего пример прямого произведения спинорного произведения на сопряженное ему, т. е. представление $(1, 0) \otimes (0, 1)$. Функции, преобразующиеся по этому представлению, образуют квадратную матрицу 2-го порядка. В соответствии с (132,13)

$$'\varphi^j_i = g^{i'}_i (g^+)^j_{j'} \varphi^{j'}_{i'}. \tag{132,18}$$

Для инфинитезимальных преобразований (132,14) дает

$$'\varphi^j_i \cong (I + i\varepsilon_\alpha \tau_\alpha)^{i'}_i (I - i\varepsilon_\beta \tau_\beta)^j_{j'} \varphi^{j'}_{i'} \cong \left\{\delta^{i'}_i \delta^j_{j'} + i\varepsilon_\alpha \left[(\tau_\alpha)^{i'}_i \delta^j_{j'} - (\tau_\alpha)^j_{j'} \delta^{i'}_i\right]\right\} \varphi^{j'}_{i'}, \tag{132,19}$$

так что генераторы этого представления имеют вид

$$(L_\alpha)^{i'j}_{ij'} = (\tau_\alpha)^{i'}_i \delta^j_{j'} - \delta^{i'}_i (\tau_\alpha)^j_{j'}. \tag{132,20}$$

Для его разложения на неприводимые представления достаточно выделить из матрицы φ^j_i ненулевой след, т. е. переписать ее в виде

$$\varphi_i^j \equiv \left(\varphi_i^j - \frac{1}{2}\delta_i^j\varphi_k^k\right) + \frac{1}{2}\delta_i^j\varphi_k^k. \qquad (132,21)$$

Последнее слагаемое инвариантно относительно преобразований из группы $SU(2)$, т. е. является скаляром. След матрицы, стоящей в скобках, равен нулю. Она содержит три независимые компоненты, преобразующиеся по неприводимому представлению размерности 3, которое называется *векторным*. Символически разложение (132,21) записывается в форме

$$(1,\ 0) \otimes (0,\ 1) = (1,\ 1) \oplus (0,\ 0). \qquad (132,22)$$

Из (132,16) и (132,8) следует, что для группы $SU(2)$ инвариантными операторами являются величины $\underline{L}^2$:

$$[\underline{L}^2,\ L_\alpha] = 0, \qquad \text{где } \underline{L}^2 \equiv L_1^2 + L_2^2 + L_3^2. \qquad (132,23)$$

Используя (132,16) и (132,7) можно показать, что любая матрица $\varphi_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ мультиплета (p, q) является собственной функцией оператора $\underline{L}^2$, причем

$$\underline{L}^2\varphi_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} = (p+q)(p+q+2)\,\varphi_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}. \qquad (132,24)$$

Собственные значения оператора $\underline{L}^2$ зависят только от типа мультиплета (точнее, лишь от его размерности) и служат его характеристикой.

Для классификации базисных элементов мультиплета, в качестве которых можно выбрать комбинации матриц $\varphi_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ лишь с одним ненулевым элементом, можно использовать собственные значения диагонального оператора L_3. Так как ранг группы $SU(2)$ равен 1, этого квантового числа достаточно. Из (132,16) и (132,7) заключаем, что если среди p нижних индексов имеется p_2, а среди q верхних индексов q_2 индексов, равных 2, то

$$L_3\varphi_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} = [(p-q) - 2(p_2 - q_2)]\,\varphi_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}. \qquad (132,25)$$

Соседние собственные значения генератора L_3, соответствующие базисным элементам данного мультиплета, отличаются на 2. Из (132,25) видно, что минимальное из них равно $-(p+q)$, а максимальное $+(p+q)$, так что всего имеется $p+q+1$ независимых членов мультиплета, и мы снова приходим к формуле (132,17) для размерности неприводимого представления.