§ 133. Изомультиплеты элементарных частиц

Предположим теперь, что сильное взаимодействие элементарных частиц инвариантно относительно группы $SU(2)$. Это означает прежде всего, что волновые функции адронов преобразуются по некоторым ее неприводимым представлениям, т. е. являются произведениями обычной волновой функции, зависящей от пространственных координат и проекции спина, на изоматрицу

$$\Psi = \psi(x, y, z, s_z)\,\varphi_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}. \qquad (133,1)$$

При этом отдельному адрону удобно сопоставлять такую волновую функцию, в которой матрица $\varphi_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ является одним из базисных элементов. Таким образом, все адроны оказываются размещенными по изомультиплетам, которые характеризуются собственными значениями инвариантного оператора L^2. Внутри изомультиплета отдельные адроны классифицируются собственными значениями генератора L_3. Вследствие предполагаемой инвариантности сильного взаимодействия относительно изогруппы во всех обусловленных им реакциях эти два квантовых числа будут сохраняться. Кроме того, должно иметь место квантовомеханическое вырождение, т. е. массы частиц, принадлежащих одному изомультиплету, будут строго одинаковыми. При включении электромагнитного взаимодействия, которое считается неинвариантным относительно изогруппы, это вырождение снимается и изомультиплеты расщепляются на отдельные частицы с несколько различными массами. Аналогом этому является, например, эффект Зеемана (§ 74), при котором наложение внешнего магнитного поля, нарушающего инвариантность относительно группы вращений, снимает имевшееся ранее вырождение уровней по проекции момента J_z.

Отметим, что для адронов, входящих в один изомультиплет, все квантовые числа (спин σ, четность P, барионное число B и странность S или гиперзаряд Y), отличные от собственных значений L_3, должны быть одинаковыми. Это следует из того, что соответствующие им операторы коммутируют с генераторами L_α, т. е. являются инвариантными операторами, и из леммы Шура.

Вместо генераторов L_α удобно ввести операторы

$$\hat{T}_\alpha \equiv \frac{1}{2} L_\alpha, \qquad (133,2)$$

которые называются операторами проекций изоспина. Тогда в качестве инвариантного оператора естественно взять оператор квадрата изоспина

$$\underline{\hat{T}}^2 \equiv \hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2 + \hat{T}_3^2 = \frac{1}{4} L^2. \tag{133,3}$$

Формулы (132,24) (132,25) теперь принимают вид такой:

$$\underline{\hat{T}}^2 \varphi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \frac{1}{4}(p+q)(p+q+2)\varphi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \equiv T(T+1)\varphi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}, \tag{133,4}$$

$$\hat{T}_3 \varphi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \left[\frac{p-q}{2} - (p_2 - q_2)\right] \varphi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \equiv T_3 \varphi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}. \tag{133,5}$$

Квантовое число

$$T = \frac{1}{2}(p+q) \tag{133,6}$$

классифицирует мультиплеты адронов и называется *изоспином*, а величина

$$T_3 = \frac{p-q}{2} - (p_2 - q_2) \tag{133,7}$$

классифицирует базисные элементы изомультиплета, т. е. отдельные принадлежащие ему адроны. Она может принимать значения от $-T$ до $+T$ и называется третьей *проекцией изоспина*. Формула (132,17) для размерности неприводимого представления, т. е. для числа различных частиц, входящих в изомультиплет, принимает вид

$$N(p\ q) \equiv N(T) = 2T + 1. \tag{133,8}$$

Для волновых функций, являющихся собственными функциями операторов $\hat{T}^2$ и $\hat{T}_3$ с собственными значениями T и T_3, в дальнейшем иногда будут использоваться дираковские обозначения $|T, T_3\rangle$. Наконец, в соответствии с эмпирическим соотношением Гелл-Манна — Нишиджимы (§ 129), положим по определению, что оператором заряда служит

$$\hat{Q} = \hat{T}_3 + \frac{B+S}{2}\hat{I} = \hat{T}_3 + \frac{Y}{2}\hat{I}, \tag{133,9}$$

где $\hat{I}$ — единичный оператор в пространстве функций $\varphi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$.

Выписанные соотношения указывают на тесную связь группы $SU(2)$ с группой вращений $SO(3)$, при этом изоспин T является полным аналогом момента J. Эта связь позволяет использовать весь аппарат теории углового момента, изложенный в § 51—52. В частности, для фактического разложения прямого произведения представлений на неприводимые применим формализм коэффициентов Клебша — Гордана (§ 52).

Рассмотрим теперь конкретные изомультиплеты адронов. Протон и нейтрон обладают примерно одинаковыми массами и тождественны по отношению к сильным взаимодействиям. Они образуют изодублет, т. е. их волновые функции имеют вид

$$\Psi_p = \psi_p\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_p\\0\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}N_1\\0\end{pmatrix};$$
$$\Psi_n = \psi_n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\psi_n\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0\\n\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0\\N_2\end{pmatrix} \qquad (133,10)$$

Волновая функция нуклона записывается как

$$N_i = \begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix}. \qquad (133,11)$$

При условии нормировки

$$\sum_{s_z=\pm\frac{1}{2}} \int dV(|p|^2+|n|^2) = 1, \qquad (133,12)$$

два слагаемых этого выражения, соответствующие протону и нейтрону, интерпретируются как вероятности обнаружения нуклона в протонном и в нейтронном состояниях. Спинорное представление имеет размерность 2, так что нуклонному изодублету следует приписать изоспин 1/2. Генераторами представления являются матрицы τ_α, так что проекции изоспина T_3 являются собственными значениями оператора $1/2(\tau_\alpha)$. Для их нахождения можно воспользоваться формулой (133,7), но в данном случае они легко определяются и непосредственно:

$$\hat{T}_3\begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix};$$
$$\hat{T}_3\begin{pmatrix}0\\n\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\n\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\n\end{pmatrix}, \qquad (133,13)$$

так что для протона $T_3 = +1/2$, для нейтрона $T_3 = -1/2$. В соответствии с (133,9), учитывая, что для нуклона $B = 1$, $S = 0$, получим

$$\hat{Q}_N = \hat{T}_3 + \frac{1}{2}\hat{I} = \frac{1}{2}(\tau_3 + I) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \qquad (133,14)$$

так что

$$\hat{Q}_N\begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix}; \quad \hat{Q}_N\begin{pmatrix}0\\n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}. \qquad (133,15)$$

Таким образом, заряды протона и нейтрона равны соответственно $+1$ и 0, как это и должно быть.

Изодублетами являются также Ξ-гиперон, резонанс Ξ_{1530}, K-мезон и мезонный резонанс K^*. Выписанные соотношения справедливы и для них, с тем лишь отличием, что для Ξ-гиперона и его резонанса гиперзаряд $Y = -1\,(B = 1, S = -2)$, так что для этих частиц оператор заряда равен

$$\hat{Q}_{\Xi} = \hat{T}_3 - \frac{1}{2}\hat{I} = \frac{1}{2}(\tau_3 - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (133{,}16)$$

Таким образом, имеются следующие изодублеты адронов:

$$N_i = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}; \quad \Xi_i = \begin{pmatrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix};$$
$$(\Xi_{1530})_i = \begin{pmatrix} \Xi^0_{1530} \\ \Xi^-_{1530} \end{pmatrix}; \quad K_i = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}; \quad K^*_i = \begin{pmatrix} K^{*+} \\ K^{*0} \end{pmatrix}. \qquad (133{,}17)$$

Естественно считать, что волновые функции антипротона и антинейтрона преобразуются по представлению, сопряженному к нуклонному, т. е.

$$\Psi_{\tilde{p}} = \psi_{\tilde{p}}\,(1,\ 0) = (\psi_{\tilde{p}},\ 0) \equiv (\tilde{p},\ 0);$$
$$\Psi_{\tilde{n}} = \psi_{\tilde{n}}\,(0,\ 1) = (0,\ \psi_{\tilde{n}}) \equiv (0,\ \tilde{n}). \qquad (133{,}18)$$

Поэтому волновая функция антинуклона записывается в виде

$$\tilde{N}^i = (\tilde{p},\ \tilde{n}). \qquad (133{,}19)$$

Изоспин антинуклона также равен 1/2, но так как все генераторы теперь изменили знак, $\hat{T}_3 = -1/2(\tau_3)$, и поэтому для антипротона $T_3 = -1/2$, для антинейтрона $T_3 = +1/2$ (следует заметить, что, согласно правилам матричного умножения, на волновую функцию, имеющую вид строки, операторы, являющиеся квадратными матрицами, действуют не слева, а справа). Очевидно, что оператор $Q_{\tilde{N}}$ заряда антинуклона равен $-Q_N$, так что антипротон имеет $Q = -1$, антинейтрон $Q = 0$. Все эти утверждения очевидным образом переносятся и на изодублеты других античастиц.

Существует три π-мезона π^+, π^0 и π^- с примерно одинаковыми массами, тождественных по отношению к сильному взаимодействию. Естественно считать, что они образуют изотриплет, т. е. их волновые функции преобразуются по векторному представлению, образуя некоторую матрицу второго порядка с нулевым следом:

$$\pi^j_i = \begin{pmatrix} \pi^1_1 & \pi^2_1 \\ \pi^1_2 & \pi^2_2 \end{pmatrix}. \qquad (133{,}20)$$

Условие $\pi^i_i = 0$ требует, чтобы

$$\pi^1_1 = -\pi^2_2. \qquad (133{,}21)$$

Изотриплету соответствует изоспин $T=1$. Воспользовавшись формулой (133,7), получим, что компоненте π_1^1 и π_2^2 соответствует $T_3=0$, компоненте $\pi_1^2 - T_3 = +1$ и компоненте $\pi_2^1 - T_3 = -1$. Так как для π-мезонов $B=S=0$, то

$$\hat{Q}_\pi = T_3, \tag{133,22}$$

т. е. их заряды совпадают со значениями проекций T_3. Поэтому

$$\pi_1^1 = -\pi_2^2 \sim \pi^0; \qquad \pi_1^2 \sim \pi^+; \qquad \pi_2^1 \sim \pi^-. \tag{133,23}$$

Потребовав, чтобы изоматрицы, входящие в состав волновой функции каждого π-мезона, были нормированы на единицу, т. е. образовывали ортонормированный базис изотриплета, и учитывая (133,20) и (133,23), для полной волновой функции π-мезона окончательно получим

$$\pi_i^l = \begin{pmatrix} \pi^0/\sqrt{2} & \pi^+ \\ \pi^- & -\pi^0/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{133,24}$$

Учитывая, что компоненты π_i^l преобразуются друг через друга по закону (132,18) и пользуясь свойствами унитарных унимодулярных матриц, нетрудно показать, что волновые функции

$$\pi^+ = \pi_1^2; \qquad \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1^1 - \pi_2^2); \qquad \pi^- = \pi_2^1 \tag{133,25}$$

преобразуются как обычные компоненты трехмерного вектора, чем и объясняется название представления (1,1). Поэтому волновую функцию π-мезона можно записывать и в виде

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}. \tag{133,26}$$

В таком формализме генераторами векторного представления и операторами проекций изоспина $\hat{T}_3$ будут эрмитовы 3-рядные квадратные матрицы с нулевым следом. Используя (51,17), сразу можно записать:

$$\hat{T}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \hat{T}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \hat{T}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{133,27}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что, действительно,

$$\hat{T}_3=\begin{pmatrix}\pi^+\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pi^+\\0\\0\end{pmatrix};\quad \hat{T}_3\begin{pmatrix}0\\\pi^0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\quad \hat{T}_3\begin{pmatrix}0\\0\\\pi^-\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0\\0\\\pi^-\end{pmatrix}. \tag{133,28}$$

Полученные результаты автоматически переносятся и на другие изотриплеты адронов: Σ, Σ_{1385}, ρ. Так как в этих случаях $Y=0$, то оператор заряда также имеет вид (133,22).

Так как представление, сопряженное к (1,1), совпадает с ним самим, а значит, совпадают и их генераторы, то структура изотриплетов античастиц тождественна структуре матрицы (133,24). Например,

$$\tilde{\Sigma}_i^j=\begin{pmatrix}\tilde{\Sigma}^0/\sqrt{2} & \tilde{\Sigma}^- \\ \tilde{\Sigma}^+ & -\tilde{\Sigma}^0/\sqrt{2}\end{pmatrix} \tag{133,29}$$

(заметим, что заряд $\tilde{\Sigma}^-$ положителен, а $\tilde{\Sigma}^+$ отрицателен). Для π-мезонов не существует квантовых чисел, кроме проекции T_3, которые отличали бы частицы от античастиц (для Σ-гиперона такими квантовыми числами являются барионное число и странность). Поэтому античастицей по отношению к π^+ является π^-, и наоборот, а в случае π^0 частица тождественна с античастицей. Именно этим объясняется, что для π-мезонов частицы и античастицы входят в один изомультиплет, а скажем, Σ и $\tilde{\Sigma}$ образуют два разных изомультиплета. Аналогичная ситуация имеет место и в случае ρ-мезонов:

$$\rho_i^j=\begin{pmatrix}\rho^0/\sqrt{2} & \rho^+ \\ \rho^- & -\rho^0/\sqrt{2}\end{pmatrix},\quad \text{причем}\ \tilde{\rho}^+=\rho^-;\quad \tilde{\rho}^-=\rho^+;\quad \tilde{\rho}^0=\rho^0. \tag{133,30}$$

Четыре нуклонных резонанса Δ^{++}, Δ^+, Δ^0 и Δ^- образуют изоквартет, т. е. их волновые функции преобразуются по неприводимому представлению размерности 4, образуя матрицу Δ_{ijk}, симметричную по любой паре индексов. Изоквартету соответствует изоспин $T=3/2$. Из (133,7) следует, что для компоненты Δ_{111} проекция изоспина $T_3=3/2$, для компонент $\Delta_{112}=\Delta_{121}=$ $=\Delta_{211}$ — $T_3=1/2$, для компонент $\Delta_{122}=\Delta_{212}=\Delta_{221}$ — $T_3=-1/2$ и для компоненты Δ_{222} — $T_3=-3/2$. Так как для Δ-резонансов $Y=1$ $(S=0)$, то

$$\hat{Q}_\Delta=\hat{T}_3+\frac{1}{2}\hat{I}, \tag{133,31}$$

так что

$$\begin{gathered}\Delta_{111}\sim\Delta^{++};\quad \Delta_{112}=\Delta_{121}=\Delta_{212}\sim\Delta^+;\\ \Delta_{122}=\Delta_{212}=\Delta_{221}\sim\Delta^0;\quad \Delta_{222}\sim\Delta^-.\end{gathered} \tag{133,32}$$

Из условий нормировки следует, что в первом и последнем соотношениях коэффициент пропорциональности равен 1, а во втором и третьем случаях он равен $1/\sqrt{3}$. Изоквартет $\tilde{\Delta}$ заполняется очевидным образом.

Существуют адроны, например, Λ- и Ω-гипероны и η-, ω- и φ-мезоны, которые являются изосинглетами, т. е. их волновые функции преобразуются по изоскалярному представлению. Так как его генераторы равны нулю, то для изосинглета $T = T_3 = 0$ и $Q = 1/2(Y)$. Античастицы $\tilde{\eta}$, $\tilde{\omega}$, $\tilde{\varphi}$ совпадают с соответствующими им частицами.

§ 134. Волновые функции системы нуклонов и π-мезонов

Рассмотрим теперь три простейшие составные системы: $N - \tilde{N}$, $N - N$ и $\pi - N$, которые представляют значительный интерес.

1. Разложим волновую функцию системы нуклон — антинуклон

$$\varphi_i^j = \tilde{N}^j N_i \tag{134,1}$$

на неприводимые части (§ 132):

$$\varphi_i^j = \left(\tilde{N}^j N_i - \frac{1}{2}\delta_i^j \tilde{N}^k N_k\right) + \frac{1}{2}\delta_i^j \tilde{N}^k N_k \equiv \chi_i^j + \delta_i^j \chi. \tag{134,2}$$

Последнее слагаемое является изоскалярным, а выражение, стоящее в скобках — изовектором. Вспоминая анализ матрицы (133,20) получим

$$\begin{aligned} &|1,\ +1\rangle = a\chi_1^2 = a\tilde{n}p; && |1,\ 0\rangle = b\chi_1^1 = b\frac{1}{2}(\tilde{p}p - \tilde{n}n);\\ &|1,\ -1\rangle = c\chi_2^1 = c\tilde{p}n; && |0,\ 0\rangle = d\chi = d\frac{1}{2}(\tilde{p}p + \tilde{n}n), \end{aligned} \tag{134,3}$$

где a, b, c, d — нормировочные коэффициенты. Считая, что пространственно-спиновые части всех волновых функций $\tilde{N}^j$ и N_i нормированы на единицу, из условия ортонормированности базисных состояний (134,3) будем иметь

$$a^2 = c^2 = 1; \qquad b^2 = d^2 = 2.$$

Таким образом, окончательно

$$\begin{gathered} |1,\ +1\rangle = \tilde{n}p; \quad |1,\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{p}p - \tilde{n}n); \quad |1,\ -1\rangle = \tilde{p}n;\\ |0,\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{p}p + \tilde{n}n). \end{gathered} \tag{134,4}$$

Если система $N - \tilde{N}$ находится в $^1S_0$ — состоянии (спины антипараллельны), то ее полный спин равен 0, а четность отрица-