Из условий нормировки следует, что в первом и последнем соотношениях коэффициент пропорциональности равен 1, а во втором и третьем случаях он равен $1/\sqrt{3}$. Изоквартет $\tilde{\Delta}$ заполняется очевидным образом.

Существуют адроны, например, Λ- и Ω-гипероны и η-, ω- и φ-мезоны, которые являются изосинглетами, т. е. их волновые функции преобразуются по изоскалярному представлению. Так как его генераторы равны нулю, то для изосинглета $T = T_3 = 0$ и $Q = 1/2(Y)$. Античастицы $\tilde{\eta}$, $\tilde{\omega}$, $\tilde{\varphi}$ совпадают с соответствующими им частицами.

§ 134. Волновые функции системы нуклонов и π-мезонов

Рассмотрим теперь три простейшие составные системы: $N - \tilde{N}$, $N - N$ и $\pi - N$, которые представляют значительный интерес.

1. Разложим волновую функцию системы нуклон — антинуклон

$$\varphi_i^j = \tilde{N}^j N_i \tag{134,1}$$

на неприводимые части (§ 132):

$$\varphi_i^j = \left(\tilde{N}^j N_i - \frac{1}{2}\delta_i^j \tilde{N}^k N_k\right) + \frac{1}{2}\delta_i^j \tilde{N}^k N_k \equiv \chi_i^j + \delta_i^j \chi. \tag{134,2}$$

Последнее слагаемое является изоскалярным, а выражение, стоящее в скобках — изовектором. Вспоминая анализ матрицы (133,20) получим

$$\begin{aligned} &|1, +1\rangle = a\chi_1^2 = a\tilde{n}p; && |1, 0\rangle = b\chi_1^1 = b\frac{1}{2}(\tilde{p}p - \tilde{n}n); \\ &|1, -1\rangle = c\chi_2^1 = c\tilde{p}n; && |0, 0\rangle = d\chi = d\frac{1}{2}(\tilde{p}p + \tilde{n}n), \end{aligned} \tag{134,3}$$

где a, b, c, d — нормировочные коэффициенты. Считая, что пространственно-спиновые части всех волновых функций $\tilde{N}^j$ и N_i нормированы на единицу, из условия ортонормированности базисных состояний (134,3) будем иметь

$$a^2 = c^2 = 1; \qquad b^2 = d^2 = 2.$$

Таким образом, окончательно

$$\begin{gathered} |1, +1\rangle = \tilde{n}p; \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{p}p - \tilde{n}n); \quad |1, -1\rangle = \tilde{p}n; \\ |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{p}p + \tilde{n}n). \end{gathered} \tag{134,4}$$

Если система $N - \tilde{N}$ находится в ${}^1S_0$ — состоянии (спины антипараллельны), то ее полный спин равен 0, а четность отрицательна (относительные четности частицы и античастицы противоположны). Таким образом, из нуклона и антинуклона можно построить псевдоскалярные изотриплет и изосинглет, т. е. π-мезон и η-мезон. Этот результат лежит в основе составной модели π-мезона, предложенной в 1949 г. Ферми и Янгом. Изотриплетное состояние $^3S_1$ пары $N - \bar{N}$ можно сопоставить ρ-мезону.

2. Рассматривая волновую функцию системы двух нуклонов

$$\varphi_{ij} = N_i' N_j'', \tag{134,5}$$

выделим из нее симметричную и антисимметричную по индексам части:

$$\varphi_{ij} = N_i' N_j'' = \frac{1}{2}\left(N_i' N_j'' + N_j' N_i''\right) + \frac{1}{2}\left(N_i' N_j'' - N_j' N_i''\right) \equiv \chi_{[ij]} + \chi_{\{ij\}}. \tag{134,6}$$

Второе слагаемое содержит одну отличную от нуля независимую компоненту ($i = 1$, $j = 2$), т. е. является изоскаляром; первое слагаемое — изовектор. Используя формулу (133,7), получим

$$\begin{aligned} &|1, +1\rangle = a\chi_{11} = ap'p''; \quad |1, 0\rangle = b\chi_{[12]} = b\,\frac{1}{2}(p'n'' + n'p'');\\ &|1, -1\rangle = c\chi_{22} = cn'n''; \quad |0, 0\rangle = d\chi_{\{12\}} = d\,\frac{1}{2}(p'n'' - n'p''). \end{aligned} \tag{134,7}$$

Нормировочные коэффициенты определяются как и раньше. Имеем

$$\begin{aligned} &|1, +1\rangle = p'p''; \qquad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(p'n'' + n'p'');\\ &|1, -1\rangle = n'n''; \qquad |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(p'n'' - n'p'') \end{aligned} \tag{134,8}$$

[ср. с соотношениями (66,4)—(66,5)]. Первые три функции, соответствующие изоспину 1, симметричны, а последняя функция, отвечающая изоскалярному состоянию системы $p - n$, антисимметрична в изопеременных.

В данном формализме протон и нейтрон рассматриваются как два состояния одной частицы — нуклона. Поэтому полная волновая функция системы двух нуклонов, рассматриваемых в качестве тождественных частиц, должна обладать определенными свойствами симметрии относительно их перестановки. Так как тип симметрии не зависит от того, какая именно пара частиц переставляется, поменяем местами два протона. Они подчиняются статистике Ферми — Дирака, т. е. при перестановке их координат и спинов волновая функция изменяет знак. С другой стороны, из (134,8) видно, что при перестановке изопеременных двух протонов волновая функция не изменяется. Таким образом, нуклоны подчиняются обобщенному принципу

Паули, согласно которому полная волновая функция системы нуклонов антисимметрична относительно перестановки любой их пары. Отсюда следует, в частности, что волновая функция системы $N-N$ с $T=1$ описывает состояние, угловой момент которого отличается от момента изоскалярного ($T=0$) состояния.

3. Из волновой функции системы π-мезона и нуклона

$$\varphi^k_{ij}=N_i\pi^k_j \tag{134,9}$$

выделим симметричную и антисимметричную по нижним индексам части:

$$\varphi^k_{ij}=\frac{1}{2}\left(N_i\pi^k_j+N_j\pi^k_i\right)+\frac{1}{2}\left(N_i\pi^k_j-N_j\pi^k_i\right)\equiv\varphi^k_{[ij]}+\varphi^k_{\{ij\}}. \tag{134,10}$$

Второе слагаемое содержит две отличные от нуля независимые компоненты $\varphi^k_{\{12\}}$, т. е. является изоспинором ($T=1/2$). Первая же матрица все еще приводима, так как ее свертки не равны нулю. Выделяя их, мы получим

$$\varphi^k_{[ij]}=\frac{1}{2}\left(N_i\pi^k_j+N_j\pi^k_i-\frac{1}{3}\delta^k_iN_m\pi^m_j-\frac{1}{3}\delta^k_jN_m\pi^m_i\right)+$$
$$+\frac{1}{6}\left(\delta^k_iN_m\pi^m_j+\delta^k_jN_m\pi^m_i\right)\equiv\chi^k_{ij}+\left(\delta^k_i\chi_j+\delta^k_j\chi_i\right). \tag{134,11}$$

Второе слагаемое представляет изоспинор, причем легко проверить, что его компоненты совпадают с двумя компонентами $\varphi^k_{\{12\}}$. Из (133,6) заключаем, что первое слагаемое отвечает изоспину $T=3/2$, т. е. содержит четыре независимые компоненты. Используя (133,7), будем иметь

$$\begin{gathered}|3/2,\ +3/2\rangle\sim\chi^2_{11};\quad |3/2,\ 1/2\rangle\sim\chi^1_{11};\ |3/2,\ -1/2\rangle\sim\chi^2_{22};\\ |3/2,\ -3/2\rangle\sim\chi^1_{22};\ |1/2,\ +1/2\rangle\sim\chi_1;\ |1/2,\ -1/2\rangle\sim\chi_2.\end{gathered} \tag{134,12}$$

Расписывая компоненты явно и определяя коэффициенты пропорциональности из условий нормировки, окончательно получим:

$$|3/2,\ +3/2\rangle=p\pi^+;\ |3/2,\ +1/2\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\,p\pi^0-\sqrt{\frac{1}{3}}\,n\pi^+;\ |3/2,\ -1/2\rangle=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{3}}\,p\pi^-+\sqrt{\frac{2}{3}}\,n\pi^0;\ |3/2,\ -3/2\rangle=n\pi^-;\ |1/2,\ +1/2\rangle=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{3}}\,p\pi^0+\sqrt{\frac{2}{3}}\,n\pi^+;\ |1/2,\ -1/2\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\,p\pi^--\sqrt{\frac{1}{3}}\,n\pi^0. \tag{134,13}$$

К этому результату можно прийти и с помощью формализма, развитого в §§ 51—52. По правилам сложения моментов изоспин системы, состоящей из π-мезона ($T = 1$) и нуклона ($T = 1/2$), может принимать значения 3/2 и 1/2. Для построения волновых функций системы, соответствующих определенным значениям T и T_3, можно воспользоваться общей формулой (52,3), которая в наших обозначениях записывается так:

$$|T,\ T_3\rangle = \sum_{t_3=\pm 1/2} C^{T}_{T_3-t_3,\ t_3} \,|1,\ T_3-t_3\rangle\,|1/2,\ t_3\rangle. \qquad (134,14)$$

Взяв коэффициенты Клебша — Гордана из таблицы § 52, будем иметь:

$$|3/2,\ +3/2\rangle = C^{3/2}_{1,\ 1/2}\,|1,\ +1\rangle\,|1/2,\ +1/2\rangle = p\pi^+;$$

$$|3/2,\ +1/2\rangle = C^{3/2}_{1,\ -1/2}\,|1,\ +1\rangle\,|1/2,\ -1/2\rangle + C^{3/2}_{0,\ 1/2}\,|1,\ 0\rangle\,|1/2,\ +1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,p\pi^0 - \sqrt{\frac{1}{3}}\,n\pi^+;$$

$$\langle 3/2,\ -1/2\rangle = C^{3/2}_{0,\ -1/2}\,|1,\ 0\rangle\,|1/2,\ -1/2\rangle + C^{3/2}_{-1,\ 1/2}\,|1,\ -1\rangle\,|1/2,\ +1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,p\pi^- + \sqrt{\frac{2}{3}}\,n\pi^0;$$

$$|3/2,\ -3/2\rangle = C^{3/2}_{-1,\ -1/2}\,|1,\ -1\rangle\,|1/2,\ -1/2\rangle = n\pi^-;$$

$$|1/2,\ +1/2\rangle = C^{1/2}_{1,\ -1/2}\,|1,\ +1\rangle\,|1/2,\ -1/2\rangle + C^{1/2}_{0,\ 1/2}\,|1,\ 0\rangle\,|1/2,\ +1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,p\pi^0 + \sqrt{\frac{2}{3}}\,n\pi^+;$$

$$|1/2,\ -1/2\rangle = C^{1/2}_{0,\ -1/2}\,|1,0\rangle\,|1/2,\ -1/2\rangle + C^{1/2}_{-1,\ 1/2}\,|1,\ -1\rangle\,|1/2,\ +1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,p\pi^- - \sqrt{\frac{1}{3}}\,n\pi^0.$$

Таким образом, снова приходим к соотношениям (134,13).

Их можно легко обратить и выразить волновую функцию системы, состоящей из одного π-мезона и одного нуклона, через функции $|T, T_3\rangle$:

$$\begin{aligned}
p\pi^+ &= |3/2,\ +3/2\rangle,\\
p\pi^0 &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|3/2,\ +1/2\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1/2,\ +1/2\rangle,\\
p\pi^- &= \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|3/2, -1/2\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1/2,\ -1/2\rangle;\\
n\pi^+ &= -\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|3/2,+\ 1/2\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1/2,\ +1/2\rangle,\\
n\pi^0 &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|3/2,\ -1/2\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1/2,\ -1/2\rangle,\\
n\pi^- &= |3/2,\ -3/2\rangle.
\end{aligned} \qquad (134,15)$$