где $\hat{Q}$ — оператор заряда нуклона, который дается формулой (133,14). Поэтому

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} e\bar{N}\gamma_\mu (I + \tau_3) NA_\mu, \tag{135,10}$$

т. е. плотность гамильтониана наряду с изоскалярной содержит и изовекторную часть (слагаемое с τ_3). Наличие последней нарушает сохранение полного изоспина T, хотя его проекция T_3 сохраняется. Но интенсивность электромагнитного взаимодействия гораздо меньше интенсивности сильного взаимодействия, так что электромагнитными поправками часто можно пренебречь, рассматривая их в лучшем случае в качестве малого возмущения.

Некоторые количественные следствия гипотезы зарядовой независимости сильного взаимодействия, эквивалентной сохранению полного спина, приводятся в следующем параграфе.

§ 136. Рассеяние нуклонов и π-мезонов

Применим формализм изоспина к анализу процессов рассеяния нуклонов на нуклонах и π-мезонов на нуклонах. Обобщение на случай любых других адронов не составляет никакого труда.

Пусть рассматривается несколько реакций:

$$a_i + b_i \to c_i + d_i, \tag{136,1}$$

причем все частицы типа a (а также b, c и d) принадлежат одному и тому же изомультиплету. Для волновых функций начального и конечного состояний будем использовать дираковские обозначения $|a_i b_i\rangle$ и $|c_i d_i\rangle$. Амплитуда рассеяния $f^{(i)}$ пропорциональна матричному элементу

$$M^{(i)} = \langle c_i d_i | a_i b_i \rangle, \tag{136,2}$$

квадрат модуля которого определяет дифференциальное и полное (после интегрирования по углам) сечения процесса.

Предположим сначала, что состояние частиц до рассеяния имеет определенные значения изоспина T и его проекции T_3, т. е. его волновой функцией является $|T, T_3\rangle$. Если выделить часть матричного элемента, соответствующую кулоновскому рассеянию, то из зарядовой независимости будет следовать, что в процессе реакции изоспин не меняется:

$$\langle T', T_3 | T, T_3 \rangle = 0 \quad \text{при} \quad T' \neq T, \tag{136,3}$$

т. е. волновой функцией конечного состояния является также функция типа $|T, T_3\rangle$. Кроме того, матричный элемент, отвечающий рассеянию за счет сильного взаимодействия, не может зависеть от значения проекции T_3, а определяется изоспином T (и другими квантовыми числами — импульсами, спинами и т. д.); обозначим

$$\langle T,\ T_3 \,|\, T,\ T_3\rangle \equiv M^{(T)}. \tag{136,4}$$

Ценность формализма изоспина применительно к рассматриваемому классу задач заключается в том, что матричный элемент любого реального процесса из их совокупности (136,1) можно выразить через небольшое число (в большинстве случаев через два) матричных элементов $M^{(T)}$, соответствующих рассеянию в определенном изоспиновом состоянии. Для этого волновые функции $|a_i b_i\rangle$ и $|c_i d_i\rangle$ достаточно разложить по волновым функциям $|T, T_3\rangle$, подставить эти разложения в (136,2) и воспользоваться формулами (136,3)—(136,4). Таким способом удается установить ряд соотношений между сечениями различных процессов, отвечающих одинаковым начальным и одинаковым конечным пространственно-спиновым состояниям частиц, участвующих в рассеянии.

1. В качестве первого примера рассмотрим рассеяние протонов на протонах и нейтронов на протонах. Прежде всего из (134,8) выразим волновые функции начального и конечного состояний, т. е. систем $p - p$ и $n - p$ через базисные функции изотриплета и изосинглета:

$$\begin{gathered} |p'p''\rangle = |1,\ +1\rangle; \quad |n'p''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,\ 0\rangle - |0,\ 0\rangle); \\ |p'n''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,\ 0\rangle + |0,\ 0\rangle). \end{gathered} \tag{136,5}$$

Тогда для процесса рассеяния

$$p' + p'' \to p' + p''$$

получим, что

$$M^{(pp)} = \langle p'p'' \,|\, p'p''\rangle = \langle 1,\ +1 \,|\, 1,\ +1\rangle = M^{(1)}. \tag{136,6}$$

При рассеянии нейтронов на протонах возможны два процесса: обычное упругое рассеяние

$$n' + p'' \to n' + p''$$

и рассеяние с перезарядкой

$$n' + p'' \to p' + n''.$$

Для первого из них

$$\begin{aligned} M^{(\text{упр})} &= \langle n'p'' \,|\, n'p''\rangle = \\ &= \frac{1}{2}[(\langle 1,\ 0| - \langle 0,\ 0|)(|1,\ 0\rangle - |0,\ 0\rangle)] = \frac{1}{2}[M^{(1)} + M^{(0)}], \end{aligned} \tag{136,7}$$

а для второго

$$M^{(\text{пер})} = \langle p'n'' \mid n'p'' \rangle + \frac{1}{2}[(\langle 1,\ 0 \mid + \langle 0,\ 0 \mid)(\mid 1,\ 0\rangle - \mid 0,\ 0\rangle)] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[M^{(1)} - M^{(0)}\right]. \qquad (136,8)$$

Угловые сечения пропорциональны квадратам модулей матричных элементов, откуда

$$\frac{d\sigma^{(pp)}}{d\Omega} \sim |M^{(1)}|^2; \qquad \frac{d\sigma^{(\text{упр})}}{d\Omega} \sim \frac{1}{4}|M^{(1)} + M^{(0)}|^2;$$
$$\frac{d\sigma^{(\text{пер})}}{d\Omega} \sim \frac{1}{4}|M^{(1)} - M^{(0)}|. \qquad (136,9)$$

Суммируя два последних выражения, получим полное сечение рассеяния нейтронов на протонах, которое экспериментально определяется общим числом протонов и нейтронов, рассеянных на данный угол. Окончательно,

$$\frac{d\sigma^{(pp)}}{d\Omega} \sim |M^{(1)}|^2; \qquad \frac{d\sigma^{(np)}}{d\Omega} \sim \frac{1}{2}|M^{(1)}|^2 + \frac{1}{2}|M^{(0)}|^2. \qquad (136,10)$$

Так как угловая зависимость матричных элементов $M^{(1)}$ и $M^{(0)}$ может быть существенно различной, то, несмотря на зарядовую независимость, поведение сечений рассеяния протонов на протонах и нейтронов на протонах как функций угловой переменной может быть неодинаковым. Эксперимент показывает, что это действительно так. В энергетической области 300—500 *Мэв* в системе центра инерции первое сечение почти не зависит от угла рассеяния, в то время как второе имеет минимум при $\theta = \pi/2$, сильно возрастая в направлении назад и в меньшей степени — в направлении вперед.

2. Несколько более интересным является пример реакций рождения π-мезонов с образованием дейтона при столкновении нуклонов:

$$p + p \to d + \pi^+,$$
$$n + p \to d + \pi^0.$$

Так как изоспин дейтона равен нулю (см. начало § 135), то

$$|\pi^+ d\rangle = |1,\ +1\rangle; \qquad |\pi^0 d\rangle = |1,\ 0\rangle. \qquad (136,11)$$

Поэтому

$$M^{(pp)} = \langle \pi^+ d \mid pp \rangle = \langle 1,\ +1 \mid 1,\ +1,\rangle = M^{(1)},$$
$$M^{(np)} = \langle \pi^0 d \mid np \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\langle 1,\ 0 \mid (\mid 1,\ 0\rangle - \mid 0,\ 0\rangle)] = \frac{1}{\sqrt{2}} M^{(1)}, \qquad (136,12)$$

откуда вытекает соотношение между сечениями

$$\frac{d\sigma^{(pp)}}{d\Omega} \Big/ \frac{d\sigma^{(np)}}{d\Omega} = 2, \qquad (136,13)$$

подтвержденное экспериментально.

3. Еще более интересный случай представляет рассеяние заряженных π-мезонов на протонах:

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + p,$$
$$\pi^- + p \to \pi^- + p,$$
$$\pi^- + p \to \pi^0 + n.$$

Отмечая матричные элементы и сечения, относящиеся к этим процессам, знаком π-мезона в конечном состоянии и воспользовавшись формулами (134,15), получим:

$$M^{(+)} = \langle \pi^+ p \mid \pi^+ p \rangle = \langle 3/2,\ +3/2 \mid 3/2,\ +3/2 \rangle = M^{(3/2)},$$

$$M^{(-)} = \langle \pi^- p \mid \pi^- p \rangle = \left[\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\langle 3/2,\ -1/2 \mid + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\langle 1/2,\ -1/2 \mid\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\sqrt{\tfrac{1}{3}} \mid 3/2,\ -1/2\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}} \mid 1/2,\ -1/2\rangle\right)\right] = \frac{1}{3} M^{(3/2)} + \frac{2}{3} M^{(1/2)};$$

$$M^{(0)} = \langle \pi^0 n \mid \pi^- p \rangle = \left[\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\langle 3/2,\ -1/2 \mid - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\langle 1/2,\ -1/2 \mid\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\sqrt{\tfrac{1}{3}} \mid 3/2,\ -1/2\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}} \mid 1/2,\ -1/2\rangle\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{3} M^{(3/2)} - \frac{\sqrt{2}}{3} M^{(1/2)},$$

откуда

$$f^{(+)} = f^{(1/2)}; \qquad f^{(-)} = \frac{1}{3} f^{(3/2)} + \frac{2}{3} f^{(1/2)};$$
$$f^{(0)} = \frac{\sqrt{2}}{3} f^{(3/2)} - \frac{\sqrt{2}}{3} f^{(1/2)}. \qquad (136,14)$$

Исключая амплитуды $f^{(3/2)}$ и $f^{(1/2)}$, будем иметь соотношение

$$f^{(+)} - f^{(-)} = \sqrt{2} f^{(0)}, \qquad (135,15)$$

из которого следуют так называемые соотношения треугольника:

$$\left| \sqrt{\sigma^{(+)}} - \sqrt{\sigma^{(-)}} \right| \leqslant \sqrt{2\sigma^{(0)}} \leqslant \sqrt{\sigma^{(+)}} + \sqrt{\sigma^{(-)}}. \qquad (136,16)$$

При некоторых дополнительных предположениях относительно свойств амплитуд можно получить более содержательные соотношения между сечениями. Так, в случае $f^{(1/2)} \simeq 0$

$$\sigma^{(+)} : \sigma^{(-)} : \sigma^{(0)} = 9 : 1 : 2. \qquad (136,17)$$

Если предположить, что $f^{(1/2)} \cong f^{(3/2)}$, то

$$\sigma^{(+)} : \sigma^{(-)} : \sigma^{(0)} = 1 : 1 : 0 \qquad (136,18)$$

Наконец, когда $f^{(3/2)} \cong 0$, то

$$\sigma^{(+)} : \sigma^{(-)} : \sigma^{(0)} = 0 : 2 : 1. \qquad (136,19)$$

Эксперимент показывает, что при энергии налетающего π-мезона, равной 120 *Мэв*, полные сечения относятся как $93 : 11 : 22 \cong 9 : 1 : 2$, т. е. в этой энергетической области доминирует рассеяние в состоянии с изоспином $T = 3/2$. При энергиях выше 200 *Мэв* начинает давать заметный вклад и амплитуда $f^{(1/2)}$.

Существует и другой, более простой метод получения соотношений между сечениями, который не требует знания коэффициентов Клебша — Гордана и особенно полезен в тех случаях, когда их вычисление по каким-то причинам является затруднительным. Он называется методом инвариантных амплитуд и будет продемонстрирован на примере рассеяния заряженных π-мезонов на нуклонах.

В предположении зарядовой независимости изоспин T при рассеянии не меняется; это означает, что полная амплитуда рассеяния одного изомультиплета на другом должна быть изоскаляром. В нашем случае она строится из волновых функций N_i и π_i^j начального состояния и волновых функций $\overline{N}^i$ и $\bar{\pi}_i^j$ конечного состояния, которые преобразуются по сопряженным представлениям (чертой мы отмечаем функции, описывающие конечное состояние; одновременно она служит символом сопряженного представления). Матрицы этих волновых функций имеют вид

$$N_i = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}; \qquad \overline{N}^i = (\bar{p}, \bar{n});$$
$$\pi_i^j = \begin{pmatrix} \pi^0/\sqrt{2} & \pi^+ \\ \pi^- & -\pi^0/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \qquad \bar{\pi}_i^j = \begin{pmatrix} \bar{\pi}^0/\sqrt{2} & \bar{\pi}^- \\ \bar{\pi}^+ & -\bar{\pi}^0/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \qquad (136,20)$$

Из них можно образовать два независимых изоскаляра

$$\overline{N}^i N_i \bar{\pi}_j^k \pi_k^j \quad \text{и} \quad \overline{N}^i \bar{\pi}_i^j \pi_j^k N_k,$$

так что амплитуда записывается в виде линейной комбинации

$$f = f_1 (\overline{N}^i N_i \bar{\pi}_j^k \pi_k^j) + f_2 (\overline{N}^i \bar{\pi}_i^j \pi_j^k N_k). \qquad (136,21)$$

Из (136,20) для изоспиновой части волновых функций частиц начального и конечного состояния имеем:

для протона: $p \to N_1 = 1, \quad \bar{p} \to \overline{N'} = 1,$

для нейтрона: $n \to N_2 = 1, \quad \bar{n} \to \overline{N^2} = 1,$

для π^+-мезона: $\pi^+ \to \pi_1^2 = 1, \quad \bar{\pi}^+ \to \bar{\pi}_2' = 1,$

для π^--мезона: $\pi^- \to \pi_2' = 1, \quad \bar{\pi}^- \to \bar{\pi}_1^2 = 1,$

для π^0-мезона: $\pi^0 \to \pi_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \pi_2^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \bar{\pi}^0 \to \bar{\pi}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}},$

$$\bar{\pi}_2^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(все остальные компоненты равны нулю).

Подставляя эти волновые функции в амплитуду (136,21), получим

$$f^{(+)} = f_1; \qquad f^{(-)} = f_1 + f_2; \qquad f^{(0)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} f_2, \tag{136,22}$$

где f_1 и f_2 — неизвестные, но одинаковые для всех пион-нуклонных процессов функции пространственно-спиновых переменных. Из (136,22) следует, в частности, соотношение (136,15), а значит, и неравенство треугольника. Из эксперимента известно, что в области высоких энергий и малых углов сечение процесса перезарядки $\pi^- + p \to \pi^0 + n$ мало́ по сравнению с упругими сечениями. Полагая поэтому $f_2 \cong 0$, получим приблизительно равенство дифференциальных сечений в направлении вперед для упругого рассеяния π^+- и π^--мезонов на протонах:

$$\left.\frac{d\sigma^{(+)}}{d\Omega}\right|_{\theta \to 0} \cong \left.\frac{d\sigma^{(-)}}{d\Omega}\right|_{\theta \to 0}. \tag{136,23}$$

Амплитуды f_i можно выразить через амплитуды $f^{(T)}$ и наоборот; для этого достаточно сравнить соотношения (136,22) и (136,14), откуда

$$f_1 = f^{(3/2)}; \qquad f_2 = -\frac{2}{3} f^{(3/2)} + \frac{2}{3} f^{(1/2)}. \tag{136,24}$$

В заключение этого параграфа укажем простой способ определения числа независимых инвариантных амплитуд. По правилу сложения моментов находим возможные значения изоспина T начального и конечного состояний. В силу зарядовой независимости возможны лишь переходы с сохранением изоспина T, поэтому число независимых амплитуд определяется числом одинаковых значений изоспина в начальном и конечном состояниях. В нашем примере изоспины и начального и конечного состояний равны 3/2 и 1/2, благодаря чему имеются две амплитуды: $f^{(3/2)}$ и $f^{(1/2)}$ или f_1 и f_2.