§ 137. Унитарная группа $SU(3)$ и ее представления

В предыдущих параграфах изучены некоторые следствия изоспиновой инвариантности сильного взаимодействия, основанной на группе $SU(2)$ и наиболее приспособленной к описанию свойств симметрии нуклонов и π-мезонов. Однако с открытием странных частиц рамки этой группы оказались слишком узкими, так как ее ранг равен 1 и она дает лишь одно сохраняющееся аддитивное[1]) квантовое число — проекцию изоспина T_3, с помощью которого классифицируются члены данного изомультиплета. В то же время имеется еще по крайней мере одна характеристика такого типа — гиперзаряд Y (или странность), так что естественно попытаться сгруппировать несколько изомультиплетов с разными гиперзарядами в один супермультиплет. Для этого необходима группа ранга 2, взаимно коммутирующие генераторы которой дают два одновременно измеримых сохраняющихся квантовых числа, служащих характеристикой членов супермультиплета, так что их можно отождествить с T_3 и Y. С другой стороны, из требования, чтобы новая теория содержала результаты старой, следует, что изогруппа должна являться частью (подгруппой) более широкой новой группы симметрии. Сформулированным требованиям наиболее просто и естественно можно удовлетворить, если постулировать приближенную инвариантность сильного взаимодействия относительно группы $SU(3)$, которая в дальнейшем будет именоваться *унитарной* (в узком смысле слова)[2]). Соответствующий математический аппарат весьма близок формализму, изложенному в § 132, на результаты которого мы часто будем ссылаться.

Группой $SU(3)$ называется совокупность всех унитарных и унимодулярных матриц третьего порядка, которые отвечают линейным преобразованиям в 3-мерном комплексном пространстве, сохраняющим квадратичную форму $x^+x = x^i x_i = x_1^* x_1 + x_2^* x_2 + x_3^* x_3$ (индексы i, j и т. д. теперь пробегают значения 1, 2, 3). Генераторами этой группы являются эрмитовы квадратные матрицы λ_α третьего порядка с равным нулю следом:

$$\lambda_\alpha^+ = \lambda_\alpha; \qquad \mathrm{Sp}\,\lambda_\alpha = 0. \tag{137,1}$$

---

[1]) Под аддитивным квантовым числом понимается величина, значение которой для некоторой системы равно сумме ее значений для подсистем. В этом смысле полный изоспин T — не аддитивная характеристика.

[2]) Следует отметить, что в 1961—1964 г. ситуация не была вполне ясной, так как не представлялось возможности сделать однозначный выбор между $SU(3)$ и так называемой группой G_2; некоторое предпочтение отдавалось даже последней. Окончательно вопрос решился в 1964 г., вместе с открытием Ω^--гиперона (см. § 138).

На 18 действительных параметров комплексных 2-рядных матриц накладывается девять условий эрмитовости и одно условие равенства нулю следа, так что существует восемь независимых матриц со свойствами (137,1), что и определяет размерность группы $SU(3)$. Среди матриц λ_α имеются две взаимно коммутирующие (ранг группы $SU(3)$ равен 2), которые можно одновременно диагонализировать. Выберем представление, в котором диагональны λ_3 и λ_8:

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\quad \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix};$$

$$\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix};\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix};\quad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix};\qquad (137,2)$$

$$\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix};\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что если все параметры ω_α группы $SU(3)$, кроме первых трех, положить равными нулю, то мы получим изогруппу $SU(2)$.

Представления группы $SU(3)$ строятся совершенно аналогично тому, как это было сделано в § 132. Однако взаимно сопряженные представления теперь уже не будут эквивалентны, так что данное неприводимое представление (p, q) определяется двумя (а не одним $p+q$) числами — p и q. Определения и соотношения (132,13)—(132,16) по-прежнему сохраняют силу, если в них τ_α заменить на λ_α и считать, что латинские индексы пробегают значения от 1 до 3, а греческие — от 1 до 8.

Найдем число независимых компонент матрицы $\varphi^{j_1\ldots j}_{i_1\ldots i_p}$ симметричной отдельно по всем нижним и верхним индексам и с равными нулю следами по любой паре верхнего и нижнего индекса, т. е. определим размерность $N(p, q)$ неприводимого представления (p, q). В силу симметрии различны лишь компоненты, отличающиеся одним из чисел p_1, p_2, p_3 (чи́сла единиц, двоек и троек среди нижних индексов). Так как $p_1+p_2+p_3=p$, то при данном p_1 число p_2 может меняться от 0 до $p-p_1$, что дает $p-p_1+1$ разных компонент. Меняя теперь p_1 от 0 до p, получим общее число различных компонент при фиксированных верхних индексах:

$$N(p) = \sum_{p_1=0}^{p} (p - p_1 + 1) = \frac{1}{2}(p+1)(p+2).$$

Аналогично, число различных компонент при фиксированных нижних индексах равно $N(q) = 1/2(q+1)(q+2)$, т. е. всего имеется $N(p)N(q)$ компонент. Но они еще не являются независимыми, так как связаны условиями равенства нулю следов. В силу симметрии достаточно, чтобы в нуль обращался след по одной из пар верхнего и нижнего индексов, который будет матрицей с $p-1$ нижними и $q-1$ верхними индексами, имея тем самым $N(p-1)N(q-1)$ компонент. Таким образом, $N(p, q) = N(p)N(q) - N(p-1) \times N(q-1)$ и окончательно

$$N(p, q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2). \qquad (137,3)$$

Перечислим наиболее важные представления группы $SU(3)$:

1. φ — $(0, 0) \equiv 1$ — унитарный скаляр или синглет $(N = 1)$;
2. φ_i и φ^i — $(1, 0) \equiv 3$ и $(0, 1) \equiv \overline{3}$ — унитарные спиноры или триплеты $(N = 3)$;
3. φ_{ij} и φ^{ij} — $(2, 0) \equiv 6$ и $(0, 2) \equiv \overline{6}$ — секступлеты $(N = 6)$;
4. φ_i^j — $(1, 1) \equiv 8$ — унитарный вектор или октуплет $(N = 8)$;
5. φ_{ijk} и φ^{ijk} — $(3, 0) \equiv 10$ и $(0, 3) \equiv \overline{10}$ — декуплеты $(N = 10)$;
6. φ_{ij}^k и φ_i^{jk} — $(2, 1) \equiv 15$ и $(1, 2) \equiv \overline{15}$ — 15-плеты $(N = 15)$;
7. φ_{ij}^{kl} — $(2, 2) \equiv 27$ — 27-плет и т. д.

(здесь указаны также очень удобные обозначения, которые сразу говорят о размерности неприводимого представления). Следует обратить внимание, например, на представления (2,0) и (1, 1); соответствующие им волновые функции имеют одинаковое число (а именно 2) индексов, но размерности мультиплетов различны (6 и 8 соответственно). Такая ситуация не может встретиться в группе $SU(2)$ в силу эквивалентности ее взаимно сопряженных представлений.

Выпишем теперь важные для дальнейшего разложения некоторых прямых произведений представлений на неприводимые:

$$(1, 0) \otimes (0, 1) = (0, 0) \oplus (1, 1) \quad \text{или} \quad 3 \otimes \overline{3} = 1 \oplus 8, \qquad (137,4а)$$

$$(1, 0) \otimes (1, 0) \otimes (1, 0) = (0, 0) \oplus (1, 1) \oplus (1, 1) \oplus (3, 0)$$
$$\text{или } 3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8' \oplus 10, \qquad (137,4б)$$

$$(1,0)\otimes(1,0)\otimes(0,1)=(1,0)\oplus(1,0)\oplus(0,2)\oplus(2,1)$$
$$\text{или}\quad 3\otimes 3\otimes\overline{3}=3\oplus 3\oplus\overline{6}\oplus 15, \qquad (137{,}4\text{в})$$
$$(1,1)\otimes(1,1)=(0,0)\oplus(1,1)\oplus(1,1)\oplus(3,0)\oplus(0,3)\oplus(2,2)$$
$$\text{или}\quad 8\otimes 8=1\oplus 8\oplus 8'\oplus 10\oplus\overline{10}\oplus 27, \qquad (137{,}4\text{г})$$
$$(1,1)\otimes(3,0)=(1,1)\oplus(3,0)\oplus(2,2)\oplus(3,1)$$
$$\text{или}\quad 8\otimes 10=8\oplus 10\oplus 27\oplus 35. \qquad (137{,}4\text{д})$$

Докажем, например, разложения (137,4а) и (137,4г). В первом случае функция $\varphi_i\chi^j$ содержит ненулевой след $\varphi_i\chi^i$, являющийся скаляром [представление $(0,0)$]; оставшаяся после его выделения функция $\varphi_i\chi^j-\frac{1}{3}\delta_i^j\varphi_k\chi^k$ преобразуется по неприводимому представлению (1,1). Доказательство формулы (137,4г) несколько сложнее. Прежде всего, если функцию $\varphi_i^j\chi_k^l$ симметризовать по нижним и по верхним индексам и выделить ненулевые следы, то получим представление $(2,2)$. Далее, два различных следа лишь по одной из пар индексов (напомним, что $\varphi_i^i=\chi_i^i=0$) после выделения ненулевых следов по оставшейся паре индексов, т. е. две функции

$$\varphi_i^j\chi_k^i-\frac{1}{3}\delta_k^j\varphi_i^l\chi_l^i \quad \text{и} \quad \varphi_i^j\chi_j^k-\frac{1}{3}\delta_i^k\varphi_l^j\chi_j^l,$$

преобразуются по двум представлениям $(1,1)$ и $(1,1)$. Полный след $\varphi_i^j\chi_j^i$ является унитарным скаляром, так что мы имеем представление $(0,0)$. Наконец, при выделении симметричных частей возникают две функции типа

$$\psi_{[ik]}^{\{jl\}}\equiv\varphi_i^j\chi_k^l+\varphi_k^j\chi_i^l-\varphi_i^l\chi_k^j-\varphi_k^l\chi_i^j \quad \text{и} \quad \psi_{\{ik\}}^{[jl]}=\varphi_i^j\chi_k^l+\varphi_i^l\chi_k^j-\varphi_k^j\chi_i^l-\varphi_k^l\chi_i^j,$$

содержащие по 10 независимых компонент каждая. Можно показать, что нижняя пара $\{ik\}$ эквивалентна одному верхнему индексу и наоборот, поэтому получаем представления $(3,0)$ и $(0,3)$. В правильности приведенного разложения можно убедиться, если сравнить размерности в левой и правой частях формулы (137,4г) : $8\times 8=1+8+8+10+10+27=64$. Остальные формулы (137,4) доказываются аналогично.

Группа $SU(3)$ имеет два инвариантных оператора, собственные значения которых могут служить для классификации неприводимых представлений. Но у нас представления уже однозначно охарактеризованы также двумя числами — p и q. Поэтому выписывать и анализировать инвариантные операторы мы не будем; в дальнейшем они не потребуются.

Для классификации базисных элементов заданного мультиплета, в качестве которых можно выбрать определенные линейные комбинации матриц $\varphi_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ лишь с одним ненулевым элементом, будем использовать собственные значения диагональных генераторов Λ_3 и Λ_8. Из явных выражений типа (132,15) для генераторов Λ_α следует, что на функции $\varphi_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ с одним отличным от нуля элементом они действуют так:

$$\Lambda_\alpha \varphi_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} = \sum_{s=1}^{p} (\lambda_\alpha)_{i_s}^{i'_s} \varphi_{i_1 \ldots i_{s-1} i'_s i_{s+1} \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} - \sum_{s=1}^{q} (\lambda_\alpha)_{j'_s}^{j_s} \varphi_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_{s-1} j'_s j_{s+1} j_q} \qquad (137,5)$$

Пусть среди нижних p индексов содержится p_3 индексов 3 и $p - p_3$ индексов 1 и 2, а среди верхних q индексов имеется q_3 троек и $q - q_3$ единиц и двоек. Так как матрица λ_8 дает $1/\sqrt{3}$ в применении к каждому верхнему и нижнему индексу 1, 2 и $-2/\sqrt{3}$ в применении к любому индексу 3, то согласно (137,5) собственные значения генератора Λ_8 равны

$$\Lambda_8 = \sqrt{3}\left[\frac{p-q}{3} - p_3 + q_3\right]. \qquad (137,6)$$

Совершенно аналогично, для собственных значений генератора Λ_3 имеем

$$\Lambda_3 = (p_1 - p_2 - q_1 + q_2). \qquad (137,7)$$

Если бы среди индексов вообще не было троек, т. е. если бы рассматривалась группа $SU(2)$, то мы получили бы соотношения $p_1 + p_2 = p$ и $q_1 + q_2 = q$. В этом случае формула (137,7) превратилась бы в (132,25).

Однако двух указанных квантовых чисел (собственных значений операторов Λ_3 и Λ_8) для однозначной классификации базисных элементов мультиплета недостаточно. К ним можно добавить, например, собственное значение оператора $\underline{\Lambda}^2 \equiv \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2$. Из (137,2) следует, что

$$\underline{\lambda}^2 \equiv \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (137,8)$$

и поэтому матрица $\underline{\lambda}^2$ не коммутирует со всеми матрицами λ_α. В силу того, что выражения для генераторов Λ_α полностью аналогичны приведенным в § 132 [см. (132,15)], это утверждение справедливо и для $\underline{\Lambda}^2$.

Поэтому ситуация с собственными значениями оператора $\underline{\Lambda}^2$ оказывается несколько более сложной, чем в двух предыдущих случаях: некоторым компонентам $\varphi^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$ может отвечать несколько собственных значений этого оператора, т. е. будет иметь место своеобразное вырождение. У мультиплетов, с которыми мы будем иметь дело, это происходит в случае $\Lambda_3 = \Lambda_8 = 0$. Если хотя бы одно из этих квантовых чисел не равно нулю, то, как легко показать,

$$\underline{\Lambda}^2 \varphi^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} = (p_1 + p_2 + q_1 + q_2)(p_1 + p_2 + q_1 + q_2 + 2)\, \varphi^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}. \qquad (137{,}9)$$

Если же $\Lambda_3 = \Lambda_8 = 0$, то стоящий справа множитель определяет максимальное собственное значение оператора $\underline{\Lambda}^2$.

§ 138. Восьмеричный формализм и унитарные мультиплеты

Предположим, что в природе имеется некоторое сверхсильное взаимодействие элементарных частиц, которое инвариантно относительно группы $SU(3)$. Тогда волновые функции адронов должны преобразовываться по некоторым ее неприводимым представлениям, т. е. они являются произведениями обычных пространственно-спиновых волновых функций на унитарные матрицы $\varphi^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$. В результате все адроны будут размещены по унитарным мультиплетам, которые характеризуются парой чисел p и q, спином, четностью, барионным числом и прочими величинами, не связанными с группой $SU(3)$ (ср. с § 133). Внутри мультиплета отдельные адроны классифицируются собственными значениями генераторов Λ_3 и Λ_8 и оператора $\underline{\Lambda}^2$, которые ниже будут отождествлены с T_3, Y и T.

Если считать, что имеется только сверхсильное взаимодействие, то эти квантовые числа должны сохраняться, причем переходы в результате реакций возможны только внутри одного унитарного мультиплета, как это было и в случае изоспиновой инвариантности. Кроме того, должно иметь место квантовомеханическое вырождение, и массы частиц, входящих в один унитарный мультиплет, обязаны быть строго одинаковыми. С другой стороны, эксперимент показывает, что массы частиц, обладающих разными гиперзарядами (при одинаковых спине, четности и барионном числе) резко различаются, например, разность масс нуклона и Ξ-гиперона составляет примерно 30% от массы последнего. Это означает, что уже обычное сильное взаимодействие должно существенно нарушать $SU(3)$-инвариантность в гораздо большей степени, чем это делает электромагнитное взаимодействие в отношении изоспиновой симметрии. Но