Поэтому ситуация с собственными значениями оператора $\underline{\Lambda}^2$ оказывается несколько более сложной, чем в двух предыдущих случаях: некоторым компонентам $\varphi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ может отвечать несколько собственных значений этого оператора, т. е. будет иметь место своеобразное вырождение. У мультиплетов, с которыми мы будем иметь дело, это происходит в случае $\Lambda_3 = \Lambda_8 = 0$. Если хотя бы одно из этих квантовых чисел не равно нулю, то, как легко показать,

$$\underline{\Lambda}^2 \varphi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = (p_1 + p_2 + q_1 + q_2)(p_1 + p_2 + q_1 + q_2 + 2)\, \varphi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}. \qquad (137{,}9)$$

Если же $\Lambda_3 = \Lambda_8 = 0$, то стоящий справа множитель определяет максимальное собственное значение оператора $\underline{\Lambda}^2$.

§ 138. Восьмеричный формализм и унитарные мультиплеты

Предположим, что в природе имеется некоторое сверхсильное взаимодействие элементарных частиц, которое инвариантно относительно группы $SU(3)$. Тогда волновые функции адронов должны преобразовываться по некоторым ее неприводимым представлениям, т. е. они являются произведениями обычных пространственно-спиновых волновых функций на унитарные матрицы $\varphi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$. В результате все адроны будут размещены по унитарным мультиплетам, которые характеризуются парой чисел p и q, спином, четностью, барионным числом и прочими величинами, не связанными с группой $SU(3)$ (ср. с § 133). Внутри мультиплета отдельные адроны классифицируются собственными значениями генераторов Λ_3 и Λ_8 и оператора $\underline{\Lambda}^2$, которые ниже будут отождествлены с T_3, Y и T.

Если считать, что имеется только сверхсильное взаимодействие, то эти квантовые числа должны сохраняться, причем переходы в результате реакций возможны только внутри одного унитарного мультиплета, как это было и в случае изоспиновой инвариантности. Кроме того, должно иметь место квантовомеханическое вырождение, и массы частиц, входящих в один унитарный мультиплет, обязаны быть строго одинаковыми. С другой стороны, эксперимент показывает, что массы частиц, обладающих разными гиперзарядами (при одинаковых спине, четности и барионном числе) резко различаются, например, разность масс нуклона и Ξ-гиперона составляет примерно 30% от массы последнего. Это означает, что уже обычное сильное взаимодействие должно существенно нарушать $SU(3)$-инвариантность в гораздо большей степени, чем это делает электромагнитное взаимодействие в отношении изоспиновой симметрии. Но в сильном взаимодействии T, T_3 и Y все же сохраняются, что позволяет выявить трансформационные свойства гамильтониана взаимодействия, нарушающего симметрию, по отношению к унитарным преобразованиям из группы $SU(3)$. А это в свою очередь дает возможность получить определенные соотношения между массами частиц, входящих в один унитарный мультиплет.

Вместо генераторов Λ_1, Λ_2, Λ_3 и Λ_8 удобно ввести операторы

$$\hat{T}_1 = \frac{1}{2}\Lambda_1, \qquad \hat{T}_2 = \frac{1}{2}\Lambda_2, \qquad \hat{T}_3 = \frac{1}{2}\Lambda_3 \tag{138,1}$$

и

$$\hat{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda_8. \tag{138,2}$$

Операторы $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$, $\hat{T}_3$ естественно отождествить с операторами проекций изоспина, а оператор

$$\underline{\hat{T}}^2 \equiv \hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2 + \hat{T}_3^2 = \frac{1}{4}\underline{\Lambda}^2 \tag{138,3}$$

— с оператором квадрата изоспина. Из (137,7) и (137,9) следует, что собственные значения $\hat{T}_3$ и $\underline{\hat{T}}^2$ равны[1])

$$T_3 = \frac{1}{2}(p_1 - p_2 - q_1 + q_2) \tag{138,4}$$

и

$$T(T+1) = \frac{1}{4}(p_1 + p_2 + q_1 + q_2)(p_1 + p_2 + q_1 + q_2 + 2). \tag{138,5}$$

Оператор $\hat{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda_8$ отождествим с оператором гиперзаряда, так что [см. (137,6)]:

$$Y = \frac{p-q}{3} - p_3 + q_3. \tag{138,6}$$

Такое отождествление не является однозначным и соответствует так называемому восьмеричному формализму или восьмеричному пути, предложенному в 1961 г. Гелл-Манном и независимо Нееманом. Его целесообразность оправдывается апостериори, так как в рамках восьмеричного формализма реальные элементарные частицы описываются наилучшим из всех возможных способов. Другой выбор оператора $\hat{Y}$ рассматривается в § 141.

Из (136,6) и из требуемой целочисленности гиперзаряда следует, что нужно рассматривать лишь такие представления группы $SU(3)$, для которых разность $p-q$ кратна трем:

$$p - q = 3n, \tag{138,7}$$

т. е. представления

$$(0, 0) = 1, \quad (1, 1) = 8, \quad (3, 0) = 10, \quad (0, 3) = \overline{10}, \quad (2, 2) = 27 \tag{138,8}$$

---

[1]) С точностью до замечания, сделанного в конце § 137.

и так далее. Ввиду важности в рассматриваемом подходе представления $(1, 1) = 8$ он получил название восьмеричного формализма. Наконец, отметим, что в соответствии с соотношением Гелл-Манна — Нишиджимы (§§ 129, 133) положим по определению, что оператором заряда служит

$$\hat{Q} = \hat{T}_3 + \frac{1}{2}\hat{Y} = \frac{1}{2}\Lambda_3 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\Lambda_8. \qquad (138,9)$$

Рассмотрим теперь конкретные унитарные мультиплеты адронов. Обратимся прежде всего к октуплету с волновой функцией φ_i^j и исследуем его содержание по изоспину, его проекции T_3, гиперзаряду Y и электрическому заряду Q. Пользуясь соотношениями (138,3)—(138,6) и (138,9), можно сразу составить следующую таблицу:

Компонента	T [1]	T_3	Y	Q	Мезон 0^-	Мезон 1^-	Барион
φ_1^1	1,0	0	0	0	π^0, η	ρ^0, ω, φ	Σ^0, Λ
φ_2^2	1,0	0	0	0	π^0, η	ρ^0, ω, φ	Σ^0, Λ
φ_1^2	1	+1	0	+1	π^+	ρ^+	Σ^+
φ_2^1	1	−1	0	−1	π^-	ρ^-	Σ^-
φ_1^3	1/2	+1/2	+1	+1	K^+	K^{*+}	p
φ_2^3	1/2	−1/2	+1	0	K^0	K^{*0}	n
φ_3^1	1/2	−1/2	−1	−1	$\widetilde{K^+}$	$\widetilde{K^{*+}}$	Ξ^-
φ_3^2	1/2	+1/2	−1	0	$\widetilde{K^0}$	$\widetilde{K^{*0}}$	Ξ^0
φ_3^3	0	0	0	0	η	ω, φ	Λ

[1]) См. замечание в конце § 137.

В последних трех колонках выписаны частицы — псевдоскалярные и векторные мезоны и барионы со спином 1/2, которые имеют соответствующие квантовые числа. Замечательным образом сюда вошли все стабильные псевдоскалярные мезоны, которых существует ровно 8, и все 8 стабильных барионов (кроме Ω^-, спин которого равен 3/2). Поэтому естественно считать, что эти две группы частиц образуют как раз унитарные октуплеты.

Матрицы их волновых функций имеют следующий вид:

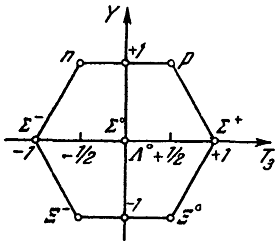
$$B_i^l = \begin{pmatrix} \Sigma^0/\sqrt{2}+\Lambda/\sqrt{6} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\Sigma^0/\sqrt{2}+\Lambda/\sqrt{6} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -2\Lambda/\sqrt{6} \end{pmatrix};$$

$$M_i^l = \begin{pmatrix} \pi^0/\sqrt{2}+\eta/\sqrt{6} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\pi^0/\sqrt{2}+\eta/\sqrt{6} & K^0 \\ \tilde{K}^+ & \tilde{K}^0 & -2\eta/\sqrt{6} \end{pmatrix}. \tag{138,10}$$

Выбор именно таких коэффициентов диктуется требованием равенства нулю следа матрицы и соображениями нормировки (см. § 133). В мезонный октуплет вошли наряду с частицами и античастицы. Это объясняется тем, что теперь не осталось квантовых чисел, не входящих в группу $SU(3)$, с помощью которых можно было бы отличить, скажем, K^+ и $\tilde{K}^+$ (ср. с § 133). Для барионов же такое число существует — это барионное число B, так что соответствующие им античастицы образуют самостоятельный октуплет:

$$\tilde{B}_i^l = \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma}^0/\sqrt{2}+\tilde{\Lambda}/\sqrt{6} & \tilde{\Sigma}^- & \tilde{\Xi}^- \\ \tilde{\Sigma}^+ & -\tilde{\Sigma}^0/\sqrt{6}+\tilde{\Lambda}/\sqrt{6} & \tilde{\Xi}^0 \\ \tilde{p} & \tilde{n} & -2\tilde{\Lambda}/\sqrt{6} \end{pmatrix}. \tag{138,11}$$

Унитарные мультиплеты удобно изображать на диаграммах, называемых весовыми; при этом выбирается прямоугольная система, по одной оси которой откладывается гиперзаряд, а по другой — проекция изоспина. Так, например, для барионного октуплета имеем:

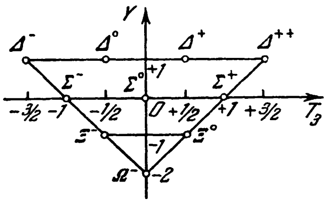


Ситуация с векторными мезонами несколько сложнее, так как на место, аналогичное тому, которое занимает η-мезон или Λ-гиперон, имеются два претендента — ω и φ. Эту ситуацию мы обсудим в конце параграфа.

Составим теперь таблицу квантовых чисел частиц, которые могут входить в состав декуплета, волновая функция которого есть $\varphi_{[ijk]}$.

Компонента	T	T_3	Y	Q	Барион $3/2^+$
φ_{111}	3/2	+3/2	+1	+2	Δ^{++}_{1236}
φ_{112}	3/2	+1/2	+1	+1	Δ^{+}_{1236}
φ_{122}	3/2	−1/2	+1	0	Δ^{0}_{1236}
φ_{222}	3/2	−3/2	+1	−1	Δ^{-}_{1236}
φ_{113}	1	+1	0	+1	Σ^{+}_{1385}
φ_{123}	1	0	0	0	Σ^{0}_{1385}
φ_{223}	1	−1	0	−1	Σ^{-}_{1385}
φ_{133}	1/2	+1/2	−1	0	Ξ^{0}_{1530}
φ_{233}	1/2	−1/2	−1	−1	Ξ^{-}_{1530}
φ_{333}	0	0	−2	−1	?

В тот момент, когда была составлена аналогичная таблица (1961—1962 гг.), место, в котором стоит знак вопроса, оставалось незанятым, так как не было известно ни одной частицы с гиперзарядом —2. Таким образом, восьмеричный формализм предсказал существование нового гиперона со спином $3/2^+$ и с указанными в таблице квантовыми числами. Мало того, приблизительно была известна и масса этой частицы (см. § 140) — примерно 1680 *Мэв*. И в начале 1964 г. такая частица была действительно открыта — это довольно стабильный Ω-гиперон (см. таблицу элементарных частиц, приведенную в § 142). Это обстоятельство уничтожило все сомнения в истинности восьмеричного формализма и вообще унитарной симметрии, которая ныне является столь же классической, как и изоспиновая. Весовая диаграмма для декуплета имеет такой вид:



Формулой (138,7) допускается и существование унитарных синглетов. Так как в этом случае все генераторы обращаются в нуль, то для унитарно скалярной частицы $T = T_3 = Y = Q = 0$. Однако среди множества резонансных состояний нет пока ни одного, волновую функцию которого можно было бы с полной достоверностью рассматривать в качестве унитарного скаляра.

Зато унитарные синглеты играют решающую роль в разрешении упомянутой выше трудности с векторными мезонами. Можно считать, что реальные ω- и φ-мезоны представляют различные суперпозиции унитарно синглетного состояния φ' и октуплетного состояния ω', аналогичного η-мезону. В случае строгой унитарной симметрии такое смешивание компонент из мультиплетов разной природы запрещено, но в результате нарушения $SU(3)$-симметрии реальным сильным взаимодействием оно уже не является невозможным. Таким образом, векторные мезоны образуют не октуплет, а нонуплет. По этому поводу мы ограничимся лишь сделанными замечаниями общего характера, отсылая читателя к литературе.

Перечислим теперь без каких-бы то ни было комментариев некоторые унитарные мультиплеты, по которым размещаются резонансы. Оказывается, что существует семейство из девяти мезонов 2^+ (в него входит, в частности, упоминавшийся в § 129 f^0-мезон), которые также образуют нонуплет. Несколько более сомнительными являются нонуплет мезонов 1^+, октуплет барионных резонансов $3/2^-$ и октуплеты барионных резонансов $5/2^+$ и $7/2^+$. Для окончательного решения вопроса пока не хватает данных.

§ 139. Некоторые следствия строгой унитарной симметрии

В этом параграфе кратко описываются некоторые физические следствия гипотезы строгой унитарной симметрии адронов. Следует сразу же подчеркнуть, что они не могут претендовать на хорошее согласие с экспериментальными данными, так как уже реальное сильное взаимодействие в значительной степени нарушает $SU(3)$-инвариантность теории. Более реалистическая схема в общих чертах описывается в следующем параграфе.

Рассмотрим прежде всего взаимодействие стабильных барионов спина $1/2^+$ (октуплет B_i^j) с псевдоскалярными мезонами (октуплет M_i^j). В квантовой теории поля барионные и мезонные функции считаются операторами в пространстве чисел заполнения. Аналогично тому, как это делалось в § 135, плотность гамильтониана взаимодействия следует строить в виде инвариантной комбинации функций $\overline{B}_i^j$, B_k^l и M_m^n. Прежде всего образуем из этих функций унитарные скаляры. Замечая, что из $\overline{B}_i^j$ и B_k^l