§ 3. Статистическое распределение в идеальном газе

В части III мы получили уже статистические распределения в идеальном газе. Для дальнейшего, однако, нам понадобится несколько другой их вывод, основанный на большом каноническом распределении. В случае идеального газа для большой статистической суммы можно написать

$$\tilde{Z}(V, T, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n Z_n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{n_k} e^{-\frac{\Sigma \varepsilon_k n_k}{kT}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_k} \prod \left(ze^{-\frac{\varepsilon_k}{kT}}\right)^{n_k},$$

поскольку в идеальном газе энергия системы ε равна

$$\varepsilon = \sum \varepsilon_k n_k,$$

где n_k — число частиц в k-м состоянии. Очевидно, что число частиц n_k подчиняется условию

$$n = \sum n_k.$$

Двойное суммирование — по числу частиц в системе и по числу частиц в данном состоянии n_k — эквивалентно однократному суммированию по всем независимым значениям n_k. Проще всего это видно на примере частиц ферми-газа, для которых $n_k = 0{,}1$. Имеем, очевидно, в этом случае

$$\tilde{Z}(V, T, z) = \sum_{n=0}^{1} z^n \sum_{n_k} \prod_{i} \left(e^{-\frac{\varepsilon_k}{kT}}\right)^{n_k} = \prod_{i} \sum_{n_k=0}^{1} \left(z \cdot e^{-\frac{\varepsilon_k}{kT}}\right)^{n_k} =$$

$$= \prod_{i} \left(1 + ze^{-\frac{\varepsilon_k}{kT}}\right) = \prod_{i} \left(1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT}}\right). \quad (3{,}1)$$

Аналогично, для бозе-частиц

$$\tilde{Z}(V, T, z) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \ldots \prod_{i} \left(ze^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}}\right)^{n_1} \left(ze^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}}\right)^{n_2} \ldots =$$

$$= \prod_{i} \sum_{n_1} \left(ze^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}}\right)^{n_1} \sum_{n_2} \left(ze^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}}\right)^{n_2} \ldots =$$

$$= \prod_{i} \frac{1}{1 - ze^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}} = \prod_{i} \frac{1}{1 - e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}}}. \quad (3{,}2)$$

В случае ферми-газа

$$\sum_{n_k} \left(e^{\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT}}\right)^{n_k} = 1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT}}.$$

В бозе-газе $n_k = 0, 1, 2, \ldots, N$, так что

$$\sum_{n_k} \left(e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{kT}}\right)^{n_k} = 1 - e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{kT}}.$$

Большую статистическую сумму (или ее логарифм, который фактически требуется для вычислений) можно записать в симметричном виде

$$\ln \tilde{Z} = \pm \sum_k \ln\left(1 \pm e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{kT}}\right), \quad \text{где} \begin{cases} +\text{для ферми-,} \\ -\text{для бозе-.} \end{cases} \tag{3,3}$$

Все средние могут быть выражены через большую статистическую сумму $\tilde{Z}$. Последняя зависит от переменных μ, V и T. Вместо парциального потенциала всегда можно ввести полное число частиц. Действительно, средние числа заполнения даются формулой (2,22)

$$\bar{n}_k = kT \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial \mu} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k-\mu}{kT}} \pm 1}, \quad \text{где} \begin{cases} +\text{для ферми-,} \\ -\text{для бозе-.} \end{cases} \tag{3,4}$$

Парциальный потенциал μ определен соотношением

$$N = \sum \bar{n}_k = \sum \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k-\mu}{kT}} \pm 1}, \tag{3,5}$$

позволяющей, в принципе, найти зависимость μ от T, V и N.

В случае бозе-газа условие (3,5) требует, чтобы парциальный потенциал μ был отрицательным. Для газа Ферми никаких ограничений на значение μ не существует.

Наиболее наглядной термодинамической характеристикой является уравнение состояния газа. Согласно § 59 гл. III уравнение состояния газа можно выразить через $\tilde{Z}$ в виде

$$pV = \mp kT \sum_k \ln\left(1 \mp e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{kT}}\right), \quad \text{где} \begin{cases} +\text{для ферми-,} \\ -\text{для бозе-.} \end{cases} \tag{3,6}$$

Мы выписали все соотношения без обсуждения, поскольку это обсуждение было сделано в ч. III. Напомним лишь, что при фактическом использовании приведенных соотношений в макроскопическом газе можно перейти от суммирования к интегрированию, написав

$$\sum_k \to g \int \frac{d\Gamma}{(2\pi\hbar)^3}; \qquad \varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m},$$

где $g = (2s+1)$, s — спин частиц. Переход к больцмановской статистике отвечает выполнению условия

$$e^{\mu/kT} \ll 1. \tag{3,7}$$

Подставляя в (3,7) парциальный потенциал идеального газа, можно представить (3,7) в виде (2,36′) или в виде (72,16) ч. III.

В части III мы подробно остановились на поведении идеального ферми-газа при низких температурах. Сейчас, во избежание повторений, мы рассмотрим только некоторые общие вопросы.

Написав (3,6) в виде

$$pV = \pm\frac{gVkT\cdot 4\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int p^2\,dp\ln\left(1\pm e^{\frac{\mu-\varepsilon}{kT}}\right) =$$

$$= \pm(gkT)\,2\pi\left(\frac{2m}{(2\pi\hbar)^2}\right)^{3/2} V\int_0^\infty \sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon\ln\left(1\pm e^{\frac{\mu-\varepsilon}{kT}}\right) =$$

$$= \pm\, gkTV\,\frac{4\pi(2m)^{3/2}}{3(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}\pm 1} = \frac{2}{3}E, \qquad (3,8)$$

мы видим, что между давлением и энергией в ферми- и бозе-газе имеет место такая же связь, как и в классическом идеальном газе.

При высоких температурах, когда выполнено условие (3,7), можно разложить подынтегральное выражение в ряд и написать так:

$$pV \simeq g\,\frac{(\pi m)^{3/2}V(kT)^{5/2}}{(2\pi\hbar)^3}\,e^{\frac{\mu}{kT}}\int_0^\infty\left(1\mp e^{\frac{\mu-\varepsilon}{kT}}\right)\times$$

$$\times\, e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\varepsilon^{3/2}\,d\varepsilon = \frac{g(\pi m)^{3/2}V(kT)^{5/2}}{(2\pi\hbar)^3}\,e^{\frac{\mu}{kT}}\left(1\pm\frac{1}{4\sqrt{2}}\,e^{\frac{\mu}{kT}}\right). \qquad (3,9)$$

В последней формуле парциальный потенциал μ относится к больцмановскому газу [см. (60,9) ч. III]. Поэтому (3,9) можно переписать в виде

$$pV = NkT\left(1\pm\frac{\pi^{3/2}}{2g}\,\frac{N}{V}\,\frac{\hbar^3}{(mkT)^{3/2}}\right), \qquad (3,10)$$

где знак минус относится к ферми- и знак плюс к бозе-газу.

Найденные поправки к давлению, как было уже подчеркнуто выше, малы по сравнению с поправками, связанными с взаимодействием между частицами.

В случае ферми-частиц, как мы видели в ч. III, эффект отталкивания, связанный с проявлением прицproperties запрета, приобретает определяющее значение в вырожденном газе.

В следующем параграфе мы обсудим проявление эффекта притяжения в вырожденном бозе-газе.