§ 4. Вырожденный идеальный бозе-газ *)

Свойства вырожденного бозе-газа коренным образом отличаются от свойств ферми-газа. Это различие связано с отсутствием каких-либо ограничений на накопление частиц в состоянии с нулевой энергией в бозе-газе.

Среднее число частиц в состоянии с нулевой энергией согласно (3,4) можно написать в виде

$$\overline{n(0)} = \frac{1}{e^{-\frac{\mu}{kT}} - 1}. \tag{4,1}$$

Мы видим, что значение $\overline{n(0)}$ определяется ходом $\mu(T)$ при $T \to 0$. Как мы видели в предыдущем параграфе, парциальный потенциал в бозе-газе всегда меньше нуля. При высоких температурах он убывает по абсолютной величине с понижением температуры.

Парциальный потенциал определяется формулой (3,5) для полного числа частиц. Эту формулу можно представить в виде

$$N = \overline{n(0)} + N' = \frac{\Omega(0)}{e^{-\frac{\mu}{kT}} - 1} + \sum{}' \frac{\Omega(\varepsilon_i)}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} - 1} = \\ = \frac{1}{e^{-\frac{\mu}{kT}} - 1} + \sum{}' \frac{\Omega(\varepsilon_i)}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} - 1}. \tag{4,2}$$

Первый член представляет среднее число частиц в состоянии с нулевой энергией, второй — число частиц во всех остальных состояниях. Статистический вес состояния с нулевой энергией равен единице (см. § 35 ч. III).

Второе слагаемое можно представить в виде

$$N' = I(\mu, V, T) = \int_0^\infty \frac{d\Gamma}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} - 1}. \tag{4,3}$$

Поэтому число частиц в состоянии с нулевой энергией

$$\overline{n(0)} = N - I(\mu, V, T).$$

Формула (4,2) позволяет выразить парциальный потенциал через температуру и плотность, тогда как формула (4,3) связывает число частиц в состоянии с нулевой энергией и в вырожденных состояниях с $\varepsilon \neq 0$ с полным числом частиц.

*) Мы следуем изложению в книге К. Хуанга «Статистическая механика», Мир, 1966, где читатель может найти ряд дополнительных сведений.

Мы видим прежде всего, что если значение интеграла I в правой части ограничено некоторой величиной $N_{\max}$, то число частиц в состоянии с нулевой энергией

$$\overline{n(0)} = N - N_{\max} > 0$$

оказывается конечным и составляющим некоторую долю от полного числа частиц. Рассмотрим величину $I(\mu, V, T)$. Очевидно, что ее можно написать в таком виде:

$$I(\mu, V, T) = V\frac{(2\pi m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}-1} =$$

$$= V\frac{(2\pi m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \varepsilon^{1/2}\,d\varepsilon\sum_{l=1}^{\infty} e^{\frac{l\mu}{kT}} e^{-\frac{l\varepsilon}{kT}} =$$

$$= V\frac{(2\pi m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{l=1}^{\infty} e^{\frac{l\mu}{kT}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{l\varepsilon}{kT}}\varepsilon^{1/2}\,d\varepsilon =$$

$$= V\frac{(2\pi m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}(kT)^{3/2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{l\mu}{kT}}}{l^{3/2}} = V\frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}F\left(-\frac{\mu}{kT}\right). \quad (4,4)$$

Таким образом, значение I определяется в основном суммой

$$F\left(-\frac{\mu}{kT}\right) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{l\mu}{kT}}}{l^{3/2}}. \quad (4,5)$$

Эта сумма сходится при всех значениях $\mu \leqslant 0$. Значение $F\left(-\frac{\mu}{kT}\right)$ представляет монотонно убывающую функцию своего аргумента, причем

$$F\left(-\frac{\mu}{kT}\right) \leqslant F(0) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{3/2}} \cong 2{,}61.$$

Соответственно,

$$I(\mu, V, T) \leqslant N'_{\max} = \frac{2{,}61V(2\pi mkT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (4,6)$$

Поэтому

$$\overline{n(0)} \geqslant N - \frac{2{,}61V(2\pi mkT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (4,7)$$

Если имеет место равенство

$$N = N'_{\max} = 2{,}61\frac{V(2\pi mkT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (4,8)$$

или

$$kT_0 = \frac{1}{(2{,}61)^{2/3}} \frac{(2\pi\hbar)^2}{(2\pi m)} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}, \tag{4,9}$$

то $\overline{n(0)} = 0$.

При $T > T_0$ в состоянии с нулевой энергией нет частиц. Точнее говоря, число частиц в этом состоянии $\overline{n(0)} \sim 1$ и пренебрежимо мало́ по сравнению с числом частиц, находящихся в возбужденных состояниях ($N' \sim N$). При достижении температуры более низкой, чем T_0, в состоянии с нулевой энергией возникает конечное число частиц $\overline{n(0)}$, составляющее некоторую долю от полного числа частиц. Распределение частиц по состояниям приобретает качественно новый вид: конечное число частиц находится на одном (нулевом) уровне энергии, а остальные частицы практически непрерывно распределены по всем возбужденным состояниям. Это явление получило название конденсации Бозе — Эйнштейна, а температура T_0 — температуры конденсации.

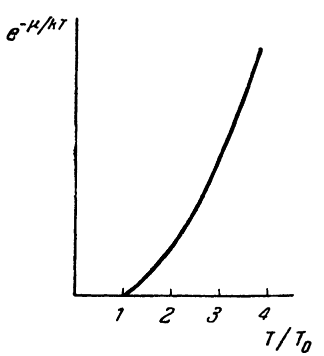

Рис. 38.

Явная зависимость $\overline{n(0)}$ от T и N/V может быть найдена, если установлена зависимость от этих величин парциального потенциала. Последняя, как мы видели, определяется уравнением (4,2). Его решение (например, графическое), показывает, что при $T = T_0$, парциальный потенциал обращается в нуль. Кривая зависимости $(-\mu/kT) = f(T/T_0)$ приведена на рис. 38.

При температурах, лежащих ниже температуры конденсации T_0, в уравнении (4,2) можно положить μ равными нулю. Тогда находим

$$\overline{n(0)} = N - I(\mu = 0,\ T,\ V) = N - N' =$$

$$= N - \frac{2{,}61 V (2\pi mkT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} = N\left(1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}\right). \tag{4,10}$$

Формула (4,10) определяет распределение частиц по состояниям при $T < T_0$.

Мы видим, что доля $N(T/T_0)^{3/2}$ всех частиц находится в возбужденных состояниях, а остальные сконденсированы в области фазового пространства, отвечающего нулевой энергии (или $p = 0$).

Аналогия с конденсацией становится еще нагляднее, если найти выражение для давления.

Согласно § 59 ч. III имеем

$$p = \frac{kT}{V}\ln\tilde{Z} = -\frac{kT}{V}\sum \ln\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}\right) =$$
$$= -\frac{kT}{V}\left[\ln\left(1 - e^{\frac{\mu}{kT}}\right) + \sum{}' \ln\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}\right)\right] =$$
$$= -\frac{kT}{V}\ln\left(1 - e^{\frac{\mu}{kT}}\right) - \frac{kT}{V}\int{}' \frac{d\Gamma}{(2\pi\hbar)^3}\ln\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}\right). \quad (4,11)$$

Штрих означает, что из суммы исключено слагаемое с $\varepsilon = 0$.

В этой формуле мы можем положить $V \to \infty$, поскольку объем макроскопической системы всегда велик. Рассмотрим области $T \gg T_0$ и $T < T_0$. При $T \gg T_0$ и $V \to \infty$ первое слагаемое обращается в нуль. Во втором слагаемом для μ можно написать выражение (72,14) ч. III для больцмановского газа и мы придем к уравнению (3,10). При $T < T_0$, как показывает анализ уравнения (4,2) для парциального потенциала, первое слагаемое при $V \to \infty$ и $\mu \to 0$ также обращается в нуль.

Поэтому, интегрируя по частям, находим

$$p = \frac{4\pi (2m)^{3/2}}{3(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} = \frac{0{,}08 m^{3/2}(kT)^{5/2}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (4,12)$$

Давление при $T < T_0$ оказывается не зависящим от плотности. Вклад в давление дают только частицы, находящиеся в состояниях с $\varepsilon \neq 0$. Поскольку их число $\sim T^{3/2}$, полное давление оказывается пропорциональным $T^{5/2}$.

Изотермы бозе-газа имеют вид, представленный на рис. 39, где изображена зависимость давления от удельного объема. В точке A, определяемой условием (4,8), удельный объем равен

$$v_0 = \frac{V}{N} = \frac{(2\pi\hbar)^3}{2{,}61\,(2\pi mkT)^{3/2}}. \quad (4,13)$$

Как видно из рис. 39, при $v < v_0$ давление постоянно, а при $v > v_0$ оно падает с ростом удельного объема.

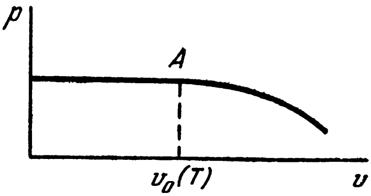

Рис. 39.

Аналогия между кривой на рис. 39 и изотермой для системы жидкость — пар очевидна. Точка $v = 0$ отвечает конденсированной, область $v > v_0$ — паровой фазе, а $0 < v < v_0$ — области разделения фаз. Аналогия фазовым переходом дополняется тем фактом, что в точке конденсации $T = T_0$ или $v = v_0$ происходит выделение скрытой теплоты перехода (т. е. фазовый переход I рода).

Мы не будем останавливаться на ее вычислении, но ограничимся двумя замечаниями. Во-первых, наряду со сходством необходимо подчеркнуть различие между процессами конденсации обычного пара и явлением бозе-конденсации. Обычная конденсация и переход в жидкое состояние обусловлены взаимодействием между молекулами.

Бозе-конденсация — процесс, происходящий в идеальном газе. Природа его совершенно иная и он связан исключительно с квантовым эффектом накопления бозе-частиц в состоянии с нулевой энергией.

Второе замечание касается вопроса о реальности явления бозе-конденсации. Совершенно ясно, что поскольку это явление может иметь место только при низких температурах или больших плотностях, при его реализации должно играть важную роль взаимодействие между частицами, которым мы пренебрегли.

Жидкий гелий He II, единственная жидкость не кристаллизующаяся при низких температурах, обнаруживает фазовый переход II рода (см. § 77 ч. III). Частицы He^4 имеют спин равный нулю и подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна. Однако имеет ли этот фазовый переход в жидкости отношение к явлению бозе-эйнштейновской конденсации в идеальном газе — не установлено. Как мы увидим в следующем параграфе, взаимодействие между частицами в неидеальном бозе-газе имеет весьма существенное значение. Оказывается, что с этим взаимодействием связано принципиальное различие в поведении идеального и неидеального газа бозе-частиц. Это делает несколько сомнительным попытки интерпретации фазового перехода в жидком гелии как проявление бозе-конденсации. Поэтому, несмотря на принципиальный интерес, который представляет явление бозе-конденсации, нет уверенности в том, что оно осуществляется в гелии.

В заключение подчеркнем, что все сказанное относилось исключительно к бозе-системам с фиксированным числом частиц. Однако стационарное состояние бозе-конденсации не может возникать в бозе-системах, у которых число частиц является переменным.

Поскольку число частиц в таких системах не имеет определенного значения, к ним нельзя применять формулу (4,2), которая была положена в основу всей теории бозе-конденсации (см., однако, § 70).

Мы ограничимся в этой главе рассмотрением бозе-частиц В главе, посвященной теории твердого тела, будут более подробно рассмотрены свойства ферми-систем.