приобретает вид

$$j_\alpha = -\rho D_\alpha \nabla c_\alpha. \qquad (7,14)$$

Часто вместо массовой концентрации c_α пользуются числом частиц в единице объема, а диффузионный поток относят не к массе, а к числу частиц. При этом

$$j_\alpha = -D_\alpha \nabla c_\alpha. \qquad (7,15)$$

Формулы (7,11) (7,14), (7,15) представляют известный эмпирический закон диффузии (закон Фика).

Ниже мы увидим, что в неизотермических системах закон диффузии должен быть несколько обобщен. В дальнейшем мы убедимся также, что закон диффузии может быть выведен теоретически для случая идеального газа из общих законов физической кинетики.

С учетом (7,11) закон сохранения массы запишется в виде

$$\frac{dc_\alpha}{dt} = D\,\Delta c_\alpha + k_p^\alpha \operatorname{div} \frac{\nabla p}{p} \qquad (7,16)$$

или, пренебрегая бародиффузией,

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\,\nabla c_\alpha) = D_\alpha \Delta c_\alpha. \qquad (7,17)$$

Последнее выражение носит название уравнения конвективной диффузии. Оно описывает как конвективный перенос вещества в движущейся среде, так и молекулярную диффузию.

§ 8. Закон сохранения импульса и уравнения движения сплошной среды

В предыдущем параграфе мы считали движение сплошной среды заданным. Сейчас мы перейдем к получению уравнений движения сплошной среды под действием приложенных к системе внешних сил.

Для этого напишем уравнения движения некоторого малого (но конечного) элемента объема V в среде в виде

$$\frac{d}{dt}\int \rho \boldsymbol{v}\, dV = \int \boldsymbol{F}\, dV + \oint \boldsymbol{F}^{(n)}\, dS, \qquad (8,1)$$

где $\boldsymbol{F}$ — объемная сила, отнесенная к единице объема и $\boldsymbol{F}^{(n)}$ — поверхностная сила, действующая на 1 $см^2$ поверхности, ограничивающий данный объем со стороны окружающей среды. Вектор $\boldsymbol{F}^{(n)}$ носит название напряжения. Для задания напряжения требуется указать направление вектора нормали к поверхности $\boldsymbol{n}$.

Введем элементарный параллелепипед, ограниченный плоскостями $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{n}_3 = \boldsymbol{k}$. Вектор $\boldsymbol{F}^{(i)}$ имеет, очевидно, компоненты F_{xx}, F_{yx}, F_{zx}, каждая из которых представляет компонент силы, действующей на площадку 1 $см^2$ с нормалью $\boldsymbol{i}$. Аналогичный смысл имеют проекции векторов $\boldsymbol{F}^{(j)}$ и $\boldsymbol{F}^{(k)}$.

Мы можем ввести тензор напряжений σ_{ik}, определив его равенством

$$\sigma_{ik} n_k = F_i^{(n_k)}. \tag{8,2}$$

Очевидно, что компоненты тензора σ_{ik} совпадают с компонентами $\boldsymbol{F}^{(n)}$. Преобразуем поверхностный интеграл в объемный по формуле Гаусса — Остроградского

$$\oint \boldsymbol{F}^{(n)}\, dS = \int \sigma_{ik} n_i\, dS = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\, dV.$$

Тогда окончательно имеем *)

$$\frac{d}{dt} \int \rho v_i\, dV = \int \rho \frac{dv_i}{dt}\, dV = \int F_i\, dV + \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV. \tag{8,3}$$

Поскольку объем V является произвольным, из (8,3) следует

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = F_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \tag{8,4}$$

или, если внешние объемные силы являются консервативными, то

$$\rho \frac{dv_i}{dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{8,5}$$

где U — потенциальная энергия единицы объема. Уравнения (8,4) или (8,5) выражают закон движения сплошной среды.

Уравнение (8,5) можно переписать в другой форме, несколько преобразовав его левую часть.

Именно, пользуясь уравнением непрерывности, можем написать

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} - v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + v_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k).$$

Поэтому имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = -\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k - \sigma_{ik}) - \frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{8,6}$$

В левой части (8,6) стоит изменение импульса единицы объема. Первый член слева представляет плотность потока импульса $j_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}$. Таким образом, (8,6) выражает закон сохранения импульса. Тензор напряжений σ_{ik} может быть связан со скоростями v_i и v_k на основе опытных данных.

---

*) Очевидно, что $\int v_i \frac{d}{dt} \rho\, dV = 0$.

В состоянии равновесия, когда скорость движения среды обращается в нуль, можно написать условие термодинамического (механического) равновесия:

$$F_i = \frac{\partial p}{\partial x_i}. \tag{8,7}$$

Сравнивая (8,4) и (8,7), приходим к выводу, что в неподвижной жидкости

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}. \tag{8,8}$$

В движущихся сплошных средах, как показывает опыт, возникают необратимые процессы. Написать выражение для σ_{ix}, справедливое для всех подвижных сред — жидкостей, газов и твердых тел, — при любых режимах течения не представляется возможным.

Мы ограничимся наиболее изученным (хотя и не самым распространенным) случаем так называемых ньютоновских жидкостей. В ньютоновских жидкостях тензор напряжений является линейной функцией градиента скорости.

При плоском течении между двумя твердыми стенками, одна из которых покоится, а другая движется со скоростью v, на поверхность твердого тела действует напряжение

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{v}{L},$$

где L — расстояние между стенками. Нетрудно заметить, что в этих условиях $\sigma_{xy} = \text{const}$. Следовательно, такое же напряжение действует на 1 *см*^{2} воображаемой плоскости, проведенной в жидкости. При произвольном законе движения для σ_{ik} можно написать общее выражение, исходя из двух требований:

1) σ_{ik} является линейной функцией производных $\partial v_i/\partial x_k$ или $\partial v_k/\partial x_i$ $(i, k = 1, 2, 3)$;

2) при равномерном вращении жидкости как целого σ_{ik} сводится к его статистическому выражению, поскольку взаимного смещения слоев жидкости при этом не происходит.

Комбинациями производных, удовлетворяющими этому условию, являются

$$a_{ik} = \alpha\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right); \quad \beta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \tag{8,9}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при $v = [\omega r]$, где ω — угловая скорость, эти комбинации производных обращаются в нуль. Поэтому в самом общем случае можно написать

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \alpha\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + \beta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}.$$

Обычно это выражение записывают в тождественном виде

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik},$$

где обозначено

$$\eta = \alpha, \tag{8,10}$$

$$\zeta - \frac{2}{3}\eta = \beta. \tag{8,11}$$

Кинетические коэффициенты η и ζ носят названия первого и второго коэффициентов вязкости.

В несжимаемой жидкости $\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$ и тензор напряжений приобретает вид

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right). \tag{8,12}$$

Ньютоновский закон вязкости имеет место у газов и некоторых капельных жидкостей (прежде всего у воды).

Вязкость является функцией температуры

$$\eta = \begin{cases} \sqrt{T} & \text{у газов,} \\ e^{-\frac{c}{T}} & \text{у капельных жидкостей.} \end{cases} \tag{8,13}$$

Ниже будет показано, что как выражение для тензора напряжений (8,12), так и температурная зависимость вязкости в случае газов могут быть найдены теоретически.

Пользуясь выражением для σ_{ik}, можно представить уравнение движения несжимаемой жидкости в виде

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$$

или

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = F_i - \frac{\partial p_i}{\partial x_i} + \eta\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2}. \tag{8,14}$$

Последнее уравнение носит название уравнения Навье — Стокса.

Уравнение Навье — Стокса может быть переписано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\rho v_i v_k + p\delta_{ik} - \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\right\} + F_i$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + F_i,$$

где

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p\delta_{ik} - \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}. \tag{8,15}$$

Интегрируя обе части (8,15) по объему и преобразуя интеграл к поверхностному, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i\, dV = -\oint \Pi_{ik}\, dS_k. \tag{8,16}$$

Последняя формула выражает, очевидно, закон сохранения импульса: изменение импульса в данном объеме жидкости равно потоку импульса, выражающемуся через окружающую его поверхность. Тензор Π_{ik} представляет собой тензор плотности потока импульса в несжимаемой жидкости.

§ 9. Закон сохранения энергии и перенос энтропии в движущейся сплошной среде

Энергия движущейся сплошной среды складывается из ее внутренней энергии E и кинетической энергии $\rho v^2/2$. При этом мы относим соответствующие величины к единице массы жидкости и не учитываем потенциальной энергии во внешем поле сил *).

Закон сохранения энергии может быть написан в интегральной или дифференциальной форме

$$\frac{d}{dt}\int\left(\rho E + \rho\frac{v^2}{2}\right)dV = -\oint \boldsymbol{j}_E\, d\boldsymbol{S}, \tag{9,1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho E + \rho\frac{v^2}{2}\right) = -\operatorname{div}\boldsymbol{j}_E, \tag{9,2}$$

где $\boldsymbol{j}_E$ — плотность потока энергии.

Найдем прежде всего производную $\frac{\partial}{\partial t}\rho\frac{v^2}{2}$, воспользовавшись уравнением (8,6). Умножая его на v_i, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\frac{v^2}{2} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\rho\frac{v_i^2}{2} = -v_i\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k - \sigma_{ik}) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\frac{v^2 v_k}{2} - \sigma_{ik}v_i\right) - \sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{9,3}$$

Полученное уравнение допускает наглядную интерпретацию: первый член в первой части представляет плотность потока кинетической энергии. Он состоит из непосредственно переносимой

*) См. книгу С. де Гроот и П. Мазур, Неравновесная термодинамика, «Мир», 1964.