где

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p\delta_{ik} - \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}. \qquad (8,15)$$

Интегрируя обе части (8,15) по объему и преобразуя интеграл к поверхностному, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i\, dV = -\oint \Pi_{ik}\, dS_k. \qquad (8,16)$$

Последняя формула выражает, очевидно, закон сохранения импульса: изменение импульса в данном объеме жидкости равно потоку импульса, выражающемуся через окружающую его поверхность. Тензор Π_{ik} представляет собой тензор плотности потока импульса в несжимаемой жидкости.

§ 9. Закон сохранения энергии и перенос энтропии в движущейся сплошной среде

Энергия движущейся сплошной среды складывается из ее внутренней энергии E и кинетической энергии $\rho v^2/2$. При этом мы относим соответствующие величины к единице массы жидкости и не учитываем потенциальной энергии во внешем поле сил *).

Закон сохранения энергии может быть написан в интегральной или дифференциальной форме

$$\frac{d}{dt}\int\left(\rho E + \rho\frac{v^2}{2}\right)dV = -\oint \boldsymbol{j}_E\, d\boldsymbol{S}, \qquad (9,1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho E + \rho\frac{v^2}{2}\right) = -\operatorname{div}\boldsymbol{j}_E, \qquad (9,2)$$

где $\boldsymbol{j}_E$ — плотность потока энергии.

Найдем прежде всего производную $\frac{\partial}{\partial t}\rho\frac{v^2}{2}$, воспользовавшись уравнением (8,6). Умножая его на v_i, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\frac{v^2}{2} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\rho\frac{v_i^2}{2} = -v_i\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k - \sigma_{ik}) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\frac{v^2 v_k}{2} - \sigma_{ik}v_i\right) - \sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \qquad (9,3)$$

Полученное уравнение допускает наглядную интерпретацию: первый член в первой части представляет плотность потока кинетической энергии. Он состоит из непосредственно переносимой

*) См. книгу С. де Гроот и П. Мазур, Неравновесная термодинамика, «Мир», 1964.

кинетической энергии $\rho\frac{v^2}{2}\boldsymbol{v}$ и потока, связанного с механической работой $\sigma_{ik}v_i$, совершаемой над средой. Последнее слагаемое, как видно из дальнейшего, включает диссипацию энергии, обусловленную вязкостью.

Именно, в несжимаемой жидкости согласно (8,12) можно написать

$$\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -p\delta_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = $$
$$= -p\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2. \quad (9,4)$$

В несжимаемой жидкости уравнение (9,3) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\frac{v^2}{2} =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\rho\frac{v^2}{2} + p\right)v_k - \eta v_i\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\right] - \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2. \quad (9,5)$$

Мы видим, что изменение кинетической энергии в данном объеме связано с вытекающим из этого объема потоком энергии и величиной, не имеющей характера потока и пропорциональной вязкости. Ясно, что эта последняя представляет диссипацию энергии. Поскольку диссипация связана с уменьшением кинетической энергии, всегда $\eta > 0$.

Возвращаясь к уравнению сохранения полной энергии (9,2), преобразуем его так, чтобы получить закон изменения внутренней энергии.

Вычитая (9,3) из (9,2), находим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\frac{v^2}{2}v_k - \sigma_{ik}v_i\right) + \sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial j_E^{(k)}}{\partial x_k}. \quad (9,6)$$

Плотность потока полной энергии j_E в изотермической жидкости, по определению, слагается из потока полной энергии, переносимого жидкостью, и потока энегии, обусловленного механической работой:

$$\left(j_E^{(k)}\right)_{\text{isoterm}} = \left(E\rho + \rho\frac{v^2}{2}\right)v_k - \sigma_{ik}v_i. \quad (9,7)$$

При $\boldsymbol{v} = 0$, т. е. в неподвижной среде, поток энергии отсутствует.

Если, однако, жидкость не изотермична, то в ней возникает поток энергии даже в состоянии покоя. Поскольку условием термодинамического равновесия служит условие постоянства температуры, при достаточно малых отклонениях от равновесия естественно положить этот поток энергии равным

$$j_T = -\varkappa\nabla T, \quad (9,8)$$

где $\varkappa$ — кинетический коэффициент, именуемый теплопроводностью. Вектор j_T называют плотностью потока тепла. Поскольку вектор j_T направлен в сторону уменьшения температуры, всегда $\varkappa > 0$. Разумеется, закон переноса (9,7) является эмпирическим и выполняется лишь при малых отклонениях от теплового равновесия.

Вектор плотности полного потока энергии в общем случае неизотермической среды можно написать в виде

$$j_E^{(k)} = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial x_k} + \left(\rho E + \rho \frac{v^2}{2}\right) v_k - \sigma_{ik} v_k. \tag{9,9}$$

Подставляя $j_E^{(k)}$ из (9,9) в (9,6) получаем

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho E v_k) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\varkappa \frac{\partial T}{\partial x_k}\right) + \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{9,10}$$

Так же как и кинетическая энергия, внутренняя энергия жидкости не сохраняется. Закон сохранения выполняется только для их суммы, т. е. для полной энергии.

Последнюю формулу удобно представить в другом виде. Именно, можно написать

$$\rho \frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \operatorname{div} \rho E \boldsymbol{v}. \tag{9,11}$$

Кроме того, определим количество тепла в единице объема соотношением

$$\rho \frac{dQ}{dt} = -\operatorname{div} j_T. \tag{9,12}$$

Выделяя в тензоре напряжений σ_{ik} член с давлением, написав

$$\sigma_{ik} = \sigma'_{ik} - p\delta_{ik}, \tag{9,13}$$

имеем

$$\rho \frac{dE}{\partial t} = \rho \frac{dQ}{dt} - p \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Разделив все уравнения на ρ, получаем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{\partial t} - \frac{p}{\rho} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{\sigma_{ik}}{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{9,14}$$

Уравнение непрерывности дает

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = -\rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \tag{9,15}$$

Поэтому окончательно

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\sigma'_{ik}}{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{9,16}$$

Как мы подчеркивали в § 1, мы приняли допущение о существовании локального равновесия в движущейся среде. Поэтому связь между термодинамическими функциями, в частности, между внутренней энергией и энтропией, дается формулами термодинамики.

Запишем основное термодинамическое равенство в виде

$$\frac{dE}{dt}=T\frac{dS}{dt}+\frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}+\sum\mu_\alpha\frac{dc_\alpha}{dt} \tag{9,17}$$

и исключим из (9,17) и (9,16) внутреннюю энергию. Тогда мы приходим к уравнению для баланса энтропии:

$$T\frac{dS}{dt}=\frac{dQ}{dt}+\frac{\sigma'_{ik}}{\rho}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\sum\mu_\alpha\frac{dc_\alpha}{dt} \tag{9,18}$$

или, пользуясь (7,8) и (9,12) и расписывая полную производную энтропии, находим

$$\rho\left(\frac{\partial S}{\partial t}+v_k\frac{\partial S}{\partial x_k}\right)=-\frac{1}{T}\frac{\partial j_T^{(k)}}{\partial x_k}+\frac{\sigma'_{ik}}{T}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\sum\frac{\partial j_{D,\alpha}^{(k)}}{\partial x_k}\frac{\mu_\alpha}{T}. \tag{9,19}$$

Это уравнение удобно записать в виде

$$\rho\left(\frac{\partial S}{\partial t}+\boldsymbol{v}\operatorname{grad}S\right)=-\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{j}_T-\sum\mu_\alpha\boldsymbol{j}_{D,\alpha}}{T}+\boldsymbol{j}_T\operatorname{grad}\frac{1}{T}-$$
$$-\frac{1}{T}\sum_\alpha\mathbf{j}_{D,\alpha}\left(T\operatorname{grad}\frac{\mu_\alpha}{T}\right)+\frac{\sigma'_{ik}}{T}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \tag{9,20}$$

или, введя вектор плотности потока энтропии $\boldsymbol{j}_S$, определенный равенством

$$\boldsymbol{j}_S=\frac{1}{T}\left(\boldsymbol{j}_T-\sum\boldsymbol{j}_{D,\alpha}\mu_\alpha\right) \tag{9,21}$$

и обозначив через Σ величину

$$\sum=\boldsymbol{j}_T\operatorname{grad}\frac{1}{T}-\frac{1}{T}\sum_\alpha\boldsymbol{j}_{D,\alpha}\left(T\operatorname{grad}\frac{\mu_\alpha}{T}\right)+\frac{\sigma'_{ik}}{T}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \tag{9,22}$$

представим (9,20) в виде

$$\rho\left(\frac{\partial S}{\partial t}+\boldsymbol{v}\operatorname{grad}S\right)=-\operatorname{div}\boldsymbol{j}_S+\sum \tag{9,23}$$

или в виде

$$\frac{\partial\rho S}{\partial t}=-\operatorname{div}(\rho S\boldsymbol{v}+\boldsymbol{j}_S)+\sum. \tag{9,24}$$

Уравнение (9,20) показывает, что энтропия не сохраняется: изменение энтропии в данном объеме в единицу времени связано не только с ее уходом вместе с движущейся средой, путем теплопроводности и молекулярной диффузии, но так же возникновением со скоростью, определяемой величиной Σ. Эта величина носит название производства энтропии.

В несжимаемой жидкости последний член в производстве энтропии согласно (9,4) связан с вязкой диссипацией. В сжимаемых жидкостях он имеет тот же смысл, но связан как с первой, так и со второй вязкостью[1]).

В однокомпонентной системе диффузионный поток отсутствует, $j_D = 0$ и соответствующие слагаемые в (9,21) и (9,22) обращаются в нуль. В однокомпонентной несжимаемой жидкости (9,23) можно представить в виде уравнения для температуры.

Здесь уместно напомнить, что под несжимаемой жидкостью мы понимаем жидкость, совершающую медленное (по сравнению со скоростью звука) движение. При таком движении плотность среды не зависит от координат и времени явно. В неизотермических условиях она может, однако, зависеть от температуры и, следовательно, изменяться во времени и в пространстве. Тем не менее уравнение непрерывности в неизотермической несжимаемой жидкости определяется формулой (7,4).

Энтропию жидкости можно представить как функцию температуры и давления. Выразим производные от энтропии по координатам и времени через производные температуры. Для этого напишем основные равенства

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \frac{\partial T}{\partial t} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{C_p}{T}\frac{\partial T}{\partial t},$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{C_p}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i},$$

$$j_T = -\varkappa \operatorname{grad} T, \qquad j_D = 0,$$

$$\frac{\sigma'_{ik}}{T}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2.$$

Подставляя эти равенства в (9,20), без труда получаем

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \operatorname{grad} T\right) = \operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} T) + \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2. \quad (9,25)$$

Это уравнение представляет уравнение теплопроводности в движущейся среде.

Часто в уравнении теплопроводности можно сделать дальнейшие упрощения. Хотя кинетические коэффициенты $\varkappa$ и η являются функциями температуры, при малых изменениях температуры этой зависимостью можно пренебречь. При этом

[1]) См. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953, стр. 229.

кинетические коэффициенты в однородной системе оказываются постоянными во всех ее точках и их можно вынести за знак производной. Кроме того, при малых скоростях движения последнее слагаемое обычно (хотя и не всегда!) мало́ и его можно опустить. Уравнение теплопроводности приобретает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \operatorname{grad} T = \chi \Delta T, \tag{9,26}$$

где $\chi = \varkappa/\rho C_p$ именуется температуропроводностью.

Мы получили систему уравнений переноса в движущихся сплошных средах. Совокупность уравнений переноса массы, уравнений движения и уравнения энергии (или энтропии) образуют полную систему, описывающую движение среды. Действительно, уравнения движения содержат пять переменных величин ($\boldsymbol{v}$, ρ, p) в однокомпонентной жидкости. Уравнение энтропии вводит еще две неизвестные функции — S и T. Для определения семи функций имеются три уравнения, уравнение непрерывности, уравнение энтропии и термодинамические соотношения $S = S(T, p)$ и уравнение состояния $p = p(T, \rho)$. Вся совокупность уравнений содержит три кинетических коэффициента — η, ζ и $\varkappa$.

Мы не будем останавливаться ни на граничных условиях, которыми должны быть дополнены эти уравнения, чтобы их решения стали однозначными, ни на проведении этих решений даже в самых простых случаях. Все эти вопросы излагаются в курсах механики сплошных сред (или гидроаэродинамики).

Наша цель заключалась лишь в том, чтобы сформулировать в известных допущениях макроскопические (феноменологические) уравнения неравновесной сплошной среды. Ниже будет показано, что как сами макроскопические уравнения, так и входящие в них кинетические коэффициенты могут быть получены из кинетических соображений, на основе молекулярных представлений, по крайней мере для простейших систем.

§ 10. Уравнение Фоккера — Планка

Мы можем теперь перейти к кинетическому описанию макроскопических систем.

Прежде всего сформулируем теорию медленных процессов, имеющую весьма общий, но несколько формальный характер.

Рассмотрим произвольную макроскопическую систему, находящуюся в состоянии неполного равновесия. Мы будем следить за изменениями ее состояний в течение промежутка времени T_0, удовлетворяющего неравенству

$$\tau_q \ll T_0 \ll \tau_s, \tag{10,1}$$

где τ_q и τ_s — времена релаксации для быстрых и медленных процессов в системе.