энергии излучения находим

$$\rho(\nu, T) = \frac{A_{21}}{B_{12}} \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{kT}} - 1} = \frac{A_{21}}{B_{12}} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \qquad (12,13)$$

Мы приходим, таким образом, к формуле Планка.

Отношение A_{21}/B_{12} может быть найдено путем перехода к формуле Рэлея — Джинса (т. е. перехода к малому значению $(h\nu/kT) \ll 1$).

Приведенный вывод формулы Планка был дан Эйнштейном. Обобщение его на случай атомов с произвольным числом уровней не представляет труда.

§ 13. Неравновесные системы с отрицательной температурой и усиление ими электромагнитных волн

Статистические системы, обладающие конечным числом уровней, обладают некоторыми замечательными особенностями. Подчеркнем прежде всего, что если все энергетические уровни системы лежат в ограниченном интервале энергий, то приведенная в § 17 ч. III аргументация по поводу существенно положительного значения температуры теряет силу. Действительно, в § 17 ч. III утверждалось, что если бы температура θ была меньше нуля, распределение Гиббса нельзя было бы подчинить условию нормировки и оно потеряло бы всякий смысл. Однако, если энергия пробегает лишь конечный ряд значений, нормировка распределения Гиббса может быть проведена при любом значении θ.

Рассмотрим систему из N атомов с конечным числом n уровней энергии, находящуюся в термостате. Хотя в действительности у атомов не бывает конечного числа уровней, для последующих рассуждений достаточно, чтобы группа близких уровней была отделена от остальных уровней широким энергетическим интервалом.

Как мы видели в § 40 ч. III, при $T = 0$ все атомы находятся на нижнем уровне энергии, а при $T \gg T_c$, где $T_c = \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_1}{k}$, распределение по уровням становится равномерным. При промежуточных значениях температуры число атомов на уровне с данной энергией, часто называемое заселенностью уровня, определяется формулой (12,4).

Представим себе теперь, что атомы не предоставлены самим себе, но к ним извне подводится энергия. Ниже мы разберем один из способов, которым можно практически подводить

энергию к системе атомов. Если в системе атомов имеется также некоторый механизм потери энергии, то в известных условиях система придет в неравновесное, но стационарное состояние. Количества подводимой и теряемой энергии будут равны между собой и в системе установится не зависящее от времени распределение атомов по уровням энергии. Это распределение будет отлично от равновесного. Заселенность уровней в системе будет отлична от (12,4). Именно, в известных условиях, в частности, при достаточно большом значении энергии, подводимой к системе, заселенность верхних уровней станет выше, чем нижних.

Если бы мы захотели описать состояние нашей неравновесной системы в терминах распределения Гиббса (12,4), то мы сказали бы, что система обладает отрицательной температурой для описания стационарных состояний. Такая терминология является весьма целесообразной.

Ход шкалы температур определится, очевидно, следующим рассуждением, которое для простоты мы проведем на примере системы с двумя уровнями.

Из формул (40,4) и (40,7) ч. III следует, что при $T=0$ все атомы находятся на нижнем уровне, так что энтропия системы равна нулю. При $T\to\infty$ (фактически при $T\gg T_c$) оба уровня заполнены равномерно, а энтропия максимальна. Ясно, однако, что при $T\to-\infty$ получается тот же результат: заселение верхнего и нижнего уровней одинаково. При уменьшении $|T|$ в области отрицательных температур частицы постепенно переходят на верхний уровень и при $T\to-0$ на этом уровне оказываются все частицы, тогда как нижний уровень совершенно не заселен. Энтропия системы снова равна нулю.

Рассмотрим теперь количественно один из возможных методов получения систем с отрицательной температурой.

Пусть, например, имеется плазма, в которой электроны и атомы (или ионы) имеют различные температуры (т. е. разные средние кинетические энергии). Пусть атомы имеют три уровня с энергиями ε_1, ε_2 и ε_3. Напишем кинетическое уравнение для чисел атомов, находящихся на этих уровнях.

При столкновении с электронами атомы с вероятностями w_{ik} $(k>i)$ переходят на верхний уровень. Таким столкновениям отвечает переход кинетической энергии электронов во внутреннюю энергию атомов (удары первого рода). Кроме того, на основании принципа детального равновесия, с вероятностью w_{ki} $(k>i)$, происходят удары второго рода, при которых внутренняя энергия атомов передается электронам. Наконец, атомы, находящиеся в возбужденных состояниях, могут высвечивать энергию с вероятностью $w_{\text{изл}}$.

Учитывая эти процессы, можем написать для числа возбужденных частиц:

$$-\frac{dN_1}{dt} = w_{12}N_1 + w_{13}N_1 - w_{21}N_2 - w_{31}N_3 - w_{\text{изл}}^{(21)}N_2 - w_{\text{изл}}^{(31)}N_3,$$

$$-\frac{dN_2}{dt} = w_{21}N_2 + w_{23}N_2 + w_{\text{изл}}^{(21)}N_2 - w_{12}N_1 - w_{32}N_3 - w_{\text{изл}}^{(32)}N_3,$$

$$-\frac{dN_3}{dt} = w_{31}N_3 + w_{32}N_3 + w_{\text{изл}}^{(31)}N_1 + w_{\text{изл}}^{(32)}N_3 - w_{13}N_1 - w_{23}N_2.$$

В случае, когда возбуждение электронами компенсируется дезактивацией ударами второго рода и излучением, возникает стационарное состояние, при котором все производные по времени обращаются в нуль. Считая вероятность перехода со второго на третий уровень $w_{23} = w_{32}$ равной нулю, а также равной нулю $w_{\text{изл}}^{(32)}$ (так называемый запрещенный переход), получаем из второго уравнения

$$-w_{21}N_2 + w_{12}N_1 - w_{\text{изл}}^{(21)}N_2 = 0.$$

Если, кроме того, вероятность высвечивания $w_{\text{изл}}^{21}$ больше, чем вероятность удара второго рода w_{21}, то

$$N_2 \approx \frac{w_{12}}{w_{\text{изл}}^{(21)}} N_1.$$

Третье уравнение дает при условии $w_{\text{изл}}^{(31)} \gg w_{31}$:

$$N_3 \approx N_1 \cdot \frac{w_{13}}{w_{\text{изл}}^{(31)}} = \frac{w_{13}}{w_{\text{изл}}^{(31)}} \frac{w_{\text{изл}}^{(21)}}{w_{12}} N_2.$$

Для отношения вероятностей w_{13}/w_{12} можно написать формулу, аналогичную (12,3), в которую входит температура того термостата, с которым происходит обмен энергией, в данном случае электронного газа с температурой $T_{\text{эл}}$:

$$w_{12} = w_{21} e^{-\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{kT_{\text{эл}}}},$$

$$w_{13} = w_{31} e^{-\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{kT_{\text{эл}}}},$$

$$\frac{w_{12}}{w_{13}} = \frac{w_{21}}{w_{31}} e^{-\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{kT_{\text{эл}}}}.$$

Поэтому окончательно:

$$N_2 = \frac{w_{21}}{w_{\text{изл}}^{(21)}} e^{-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{kT_{\text{эл}}}} N_1, \tag{13,1}$$

$$N_3 = \frac{w_{\text{изл}}^{(21)}}{w_{21}} \frac{w_{31}}{w_{\text{изл}}^{(31)}} e^{-\frac{\varepsilon_3-\varepsilon_2}{kT_{\text{эл}}}} N_2. \tag{13,2}$$

В окончательную формулу вошли отношения вероятностей двух возможных видов перехода с уровней 2 и 3 — путем излучения и с помощью ударов второго рода. По предположению, первая вероятность много больше второй. Поскольку $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, из (13,1) следует $N_2 \ll N_1$. Наоборот, хотя $\varepsilon_3 > \varepsilon_2$, при достаточно большом значении предэкспоненциального множителя, в (13,2) эта формула приводит к значениям $N_3 > N_2$. Это означает, что благодаря запрету перехода с третьего уровня на второй столкновения с электронами переходят большее число атомов на уровень 3, чем на уровень 2.

Уровень 3 имеет, таким образом, отрицательную температуру по отношению к уровню 2. Подчеркнем, что разобранный способ получения отрицательных температур не является самым важным и распространенным на практике. Однако он наиболее простым образом позволяет выявить необходимые для этого физические условия [1]).

Мы можем теперь перейти к упомянутым выше свойствам систем с отрицательной температурой.

Если рассмотреть взаимодействие системы при $T < 0$ с излучением, то сразу ясно, что это взаимодействие принципиально отличается от взаимодействия с системой при температуре $T > 0$. Предположим, что на систему действует монохроматическое излучение с частотой

$$\nu = \frac{\Delta\varepsilon}{h} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{h}.$$

Это излучение будет поглощаться, причем поглощенная интенсивность I^- пропорциональна числу атомов в состоянии 2 и плотности излучения:

$$I^- B_{23} N_2 \rho.$$

---

[1]) Более подробно о методах получения отрицательных температур см. обзор: Н. Г. Басов, О. Н. Крохин, Ю. М. Попов, Генерация, усиление и индикация излучения с помощью квантовых систем, УФН, т. 72, вып. 2, 1960; А. Вейлстеке, Основы теории квантовых усилителей и генераторов, ИЛ, 1963; Н. В. Карлов, А. А. Маненков, Квантовые усилители, «Итоги науки», ВИНИТИ, М., 1966.

Наряду с поглощением будет иметь место излучение атомов, находящихся в состоянии 3, вынужденное и спонтанное. Излучаемая интенсивность равна (ср. (12,11)):

$$I^+ = B_{32}N_3\rho + A_{32}N_3.$$

Разность интенсивностей

$$I^+ - I^- = B_{32}\rho\,(N_3 - N_2) + A_{32}N_3.$$

Если $N_3 - N_2 > 0$, т. е. если уровень 3 имеет отрицательную температуру по отношению к уровню 2, то, проходя через систему, излучение будет не ослабляться поглощением, а усиливаться благодаря вынужденной эмиссии.

На использовании этого эффекта основана работа мазеров и лазеров — квантовомеханических усилителей и генераторов. Они находят все более широкое применение в современной радиотехнике. Лазеры являются наиболее эффективными современными генераторами в области инфракрасного и оптического диапазонов волн.