

ГЛАВА III

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ И ГАЗОПОДОБНЫХ СИСТЕМ

§ 14. Кинетическое уравнение Больцмана

Мы подчеркивали выше, что решение основного кинетического уравнения сталкивается с очень значительными трудностями. Поэтому основные практические результаты получены при рассмотрении таких физических систем, для которых основное кинетическое уравнение может быть заменено более простым кинетическим уравнением.

Основное кинетическое уравнение определяет числа N_i или распределение частиц по состояниям с учетом всех связей и взаимодействий, существующих между частицами системы.

Однако ясно, что в ряде случаев такое описание макросистем является слишком детальным. Это прежде всего относится к идеальному газу. В классическом приближении, которым мы будем в дальнейшем ограничиваться, вместо числа частиц в данном состоянии можно описывать состояние системы непрерывной функцией распределения. Последняя, в силу отсутствия взаимодействия между частицами, распадается на произведение функций распределения отдельных частиц. Задание функции распределения отдельной частицы позволяет полностью описать свойства идеального газа как целого.

Рассмотрим функцию распределения для молекулы неравновесного идеального газа. Мы знаем, что в идеальном газе каждую молекулу можно считать квазизамкнутой подсистемой.

В отличие от равновесного газа, функция распределения зависит, вообще говоря, от координат x , y , z , компонент импульса p_x , p_y , p_z и времени t . В дальнейшем удобно ввести следующие обозначения: пусть dn — число молекул, изобразительные точки которых лежат в элементе фазового пространства

$$d\gamma = dx dy dz dp_x dp_y dp_z = dp dV$$

в момент времени t . Тогда

$$dn = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\gamma,$$

где $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ является искомой функцией распределения. Изменение величины dn во времени (т. е. изменение числа изобразительных точек, находящихся в элементе объема $d\gamma$) обусловлено соударениями между молекулами газа.

Если в результате столкновения двух молекул, имеющих импульсы \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 , одна из них получает импульс \mathbf{p} , то при этом ее изобразительная точка попадает в элемент пространства $d\gamma$. Если, наоборот, молекула, имевшая импульс \mathbf{p} , сталкивается с другой молекулой и приобретает новый импульс, ее изобразительная точка выходит из объема $d\gamma$. Очевидно, что чем больше объем $d\gamma$, тем больше (при прочих равных условиях) число молекул, изобразительные точки которых входят и выходят из этого объема в единицу времени. Изменение числа частиц в элементе фазового объема в единицу времени. Изменение числа частиц в элементе фазового объема в единицу времени можно написать в виде

$$\frac{d(dn)}{dt} = \frac{df(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\gamma}{dt} = (b - a) d\gamma,$$

где $(a d\gamma)$ — число молекул, изобразительные точки которых покидают элемент объема $d\gamma$ в результате столкновений типа $(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) \rightarrow (\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$, и $(b d\gamma)$, аналогичным образом, число молекул, изобразительные точки которых входят в элемент объема $d\gamma$ вследствие столкновений типа $(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) \rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$.

Таким образом, имеем

$$\frac{df}{dt} = b - a.$$

Полную производную $\frac{df(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{dt}$ можно, очевидно, представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_x} \frac{dp_x}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_y} \frac{dp_y}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_z} \frac{dp_z}{dt} + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{df(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \frac{\mathbf{p}}{m} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{F},$$

где $\frac{\mathbf{p}}{m} = \mathbf{v}$ — скорость молекулы, а $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$ — сила, действующая на молекулу, имеющую импульс и координаты, лежащие в элементе фазового объема $d\gamma$ в момент времени t .

Окончательно находим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = I, \quad (14,1)$$

где $I = b - a$.

Дальнейшая задача заключается в нахождении величины $I = b - a$, именуемой обычно интегралом столкновений. Интеграл столкновений может быть найден для достаточно разреженного газа, в котором столкновения происходят только попарно. Мы будем предполагать, что при столкновениях не происходит перехода кинетической энергии в энергию, отвечающую другим степеням свободы, т. е. что столкновения молекул происходят по законам упругих столкновений твердых шаров.

При попарных упругих столкновениях одинаковых частиц выполняются законы сохранения импульса и энергии, которые можно записать в таком виде:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p} = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2, \quad (14,2)$$

$$p_1^2 + p^2 = p_3^2 + p_2^2. \quad (14,3)$$

Процесс упругого столкновения молекул можно охарактеризовать дифференциальным эффективным сечением рассеяния в элемент телесного угла $d\Omega_1$. При этом эффективное сечение зависит от абсолютной величины относительной скорости сталкивающихся частиц $v_{\text{отн}} = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|$ и угла рассеяния $\alpha = \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$. Поэтому дифференциальное сечение рассеяния частицы, имеющей скорость \mathbf{v} , в телесный угол $d\Omega_1$ можно написать в виде

$$d\sigma = \sigma(v_{\text{отн}}, \alpha) d\Omega_1. \quad (14,4)$$

Каждая из $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p} dV$ частиц, имеющих импульс \mathbf{p} , испытывает за 1 секунду столкновения с частицами, имеющими импульс \mathbf{p}_1 и находящимися в цилиндре с высотой $v_{\text{отн}}$ и площадью основания $d\sigma$. Число последних равно $v_{\text{отн}} d\sigma f(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p}_1$. Поэтому полное число попарных столкновений, испытываемых за 1 секунду частицами, находящимися в элементе фазового объема $d\gamma$, равно

$$v_{\text{отн}} \sigma(v_{\text{отн}}, \alpha) d\Omega_1 f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p} dV f(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p}_1.$$

Для нахождения интересующей нас величины $a d\gamma$ мы должны учесть, что любое столкновение, испытываемое частицей с импульсом \mathbf{p} , приводит к изменению \mathbf{p} и выводу ее изобразительной точки из объема $d\gamma$. Поэтому

$$a d\gamma = d\mathbf{p} dV \int \int v_{\text{отн}} \sigma(v_{\text{отн}}, \alpha) f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) f(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p}_1 d\Omega_1$$

или

$$a = \int \int v_{\text{отн}} \sigma(v_{\text{отн}}, \alpha) f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) f(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p}_1 d\Omega_1. \quad (14,5)$$

Интегрирование производится по всему телесному углу Ω_1 и всем значениям импульса p_1 . Аналогично может быть найдено число соударений, в результате которых в объеме dV появляются изобразительные точки, т. е. число столкновений типа

$$(p_2, p_3) \rightarrow (p, p_1).$$

Можно написать, очевидно, что число столкновений молекул с импульсами p_2 и p_3 за 1 секунду равно

$$v'_{\text{отн}} \sigma(v'_{\text{отн}}, \alpha) d\Omega_1 f(p_2, r, t) f(p_3, r, t) dV dp_2 dp_3,$$

$$\text{где } v'_{\text{отн}} = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3|.$$

Интересующая нас величина $b dV$ получится интегрированием последнего выражения по всем значениям импульсов p_2 и p_3 , удовлетворяющих условиям (14,2) и (14,3):

$$b dV = dV \int \int \int v'_{\text{отн}} \sigma(v'_{\text{отн}}, \alpha) f(p_2, r, t) f(p_3, r, t) dp_2 dp_3 d\Omega_1. \quad (14,6)$$

Законы упругого удара позволяют выразить $v'_{\text{отн}}$ через $v_{\text{отн}}$ и $dp_2 dp_3$ через $dp dp_1$. Именно, относительная скорость после столкновения $v'_{\text{отн}} = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3|$ равна относительной скорости до столкновения $v_{\text{отн}} = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|$. Для перехода от интегрирования по $dp_2 dp_3$ к $dp dp_1$ можно написать

$$dp_2 dp_3 = \left| \frac{\partial(p_2, p_3)}{\partial(p, p_1)} \right| dp dp_1.$$

Модуль якобиана преобразования $p_2, p_3 \rightarrow p, p_1$ удобно вычислить, направив вектор p по оси x .

Простое вычисление дает

$$\left| \frac{\partial(p_2, p_3)}{\partial(p, p_1)} \right| = 1,$$

поэтому

$$dp_2 dp_3 = dp dp_1.$$

Подставляя последнее равенство в (14,6), находим

$$b = \int \int v_{\text{отн}} \sigma(v_{\text{отн}}, \alpha) f(p_2, r, t) f(p_3, r, t) dp_1 d\Omega_1. \quad (14,7)$$

В функциях $f(p_2, r, t)$ и $f(p_3, r, t)$ для выполнения интегрирования векторы p_2 и p_3 должны быть выражены через p и p_1 .

С помощью найденных значений b и a интеграл столкновений можно написать в симметричном виде:

$$I = b - a = \int \int v_{\text{отн}} \sigma(v_{\text{отн}}, \alpha) [f(p_2, r, t) f(p_3, r, t) - f(p, r, t) f(p_1, r, t)] dp_1 d\Omega_1. \quad (14,8)$$

Подставляя значение интеграла столкновений в (14,1), приходим к уравнению:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \int \int v_{\text{отн}} \sigma(v_{\text{отн}}, \alpha) [f(\mathbf{p}_2, \mathbf{r}, t) f(\mathbf{p}_3, \mathbf{r}, t) - f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) f(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}, t)] d\mathbf{p}_1 d\Omega_1. \quad (14,9)$$

В дальнейшем для краткости мы будем писать вместо $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$, $f(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}, t)$, $f(\mathbf{p}_2, \mathbf{r}, t)$ и $f(\mathbf{p}_3, \mathbf{r}, t)$ соответственно f , f_1 , f_2 и f_3 и вместо $\sigma(v_{\text{отн}}, \alpha)$ просто σ .

В этих обозначениях имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \int \int v_{\text{отн}} \sigma [f_2 f_3 - f f_1] d\mathbf{p}_1 d\Omega_1. \quad (14,10)$$

Найденное интегро-дифференциальное уравнение (14,9) (или, в краткой записи, (14,10)) для функции распределения носит название кинетического уравнения Больцмана.

Значение уравнения Больцмана далеко выходит за рамки физической кинетики идеального газа. Как будет видно из ряда примеров, которые будут рассмотрены в дальнейшем в этой и других главах книги, целый ряд физических систем, очень далеких, по существу, от идеального газа, по формальным признакам удовлетворяет требованиям, положенным в основу вывода кинетического уравнения Больцмана, и описываются этим уравнением.

С математической точки зрения уравнение Больцмана представляет нелинейное интегро-дифференциальное уравнение с частными производными. Для того чтобы уравнение Больцмана приобрело конкретный смысл, необходимо знать зависимость эффективного сечения от относительной скорости и угла рассеяния, а также поле сил, действующих на частицы газа. Однако даже при простейших предположениях о виде функции $\sigma(v_{\text{отн}}, \alpha)$ и о характере поля сил провести его интегрирование весьма трудно.

Ниже будут изложены методы решения уравнения Больцмана. Пока заметим, что наряду с импульсами часто удобно пользоваться в качестве переменных скоростями молекулы. В переменных (v, \mathbf{r}, t) уравнение Больцмана приобретает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \int \sigma v_{\text{отн}} [f_2 f_3 - f f_1] dv_1 d\Omega. \quad (14,11)$$

В дальнейшем мы будем переходить от переменных \mathbf{p} к переменным \mathbf{v} или от (14,9) к (14,11), не делая специальных оговорок. Мы не будем также оговаривать переход от векторных к тензорным обозначениям, в которых (14,11) приобретает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} = \int \sigma v_{\text{отн}} [f_2 f_3 - f f_1] dv_1 d\Omega. \quad (14,12)$$

Иногда уравнение Больцмана записывают в более симметричном представлении, при котором в интеграле столкновений проводится интегрирование по всем значениям импульсов сталкивающихся частиц.

Именно в силу законов сохранения импульса и энергии можно написать

$$\begin{aligned} b - a &= \int \sigma v_{\text{отн}} [f_2 f_3 - f f_1] d\mathbf{p}_1 d\Omega = \\ &= \int \sigma v_{\text{отн}} [f_2 f_3 - f f_1] \delta(\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \times \\ &\quad \times \delta(\epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon - \epsilon_1) d\epsilon_3 d\Omega, \end{aligned} \quad (14,13)$$

где дельта-функция векторного аргумента $\delta(\mathbf{p})$ означает

$$\delta(\mathbf{p}) = \delta(p_x) \delta(p_y) \delta(p_z).$$

Вместо интегрирования по энергии ϵ_3 можно ввести интегрирование по импульсу p_3 , поскольку

$$\begin{aligned} d\epsilon_3 d\Omega \delta(\epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_1 - \epsilon) &= 2m \delta(p_2^2 + p_3^2 - p_1^2 - p^2) d\epsilon_3 d\Omega = \\ &= \frac{2p_3}{m} d\Omega dp_3 \delta(p_2^2 + p_3^2 - p_1^2 - p^2) = \delta(p_2^2 + p_3^2 - p_1^2 - p^2) \frac{2dp_3}{p_3}. \end{aligned}$$

Поэтому можно переписать (14,8) в виде

$$\begin{aligned} b - a &= \int \sigma v_{\text{отн}} [f_2 f_3 - f_1 f] \delta(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) \times \\ &\quad \times \delta(p_3^2 + p_2^2 - p_1^2 - p^2) \left(\frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_2} \right) \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\Omega}{m}. \end{aligned} \quad (14,14)$$

При этом мы вместо $\frac{2}{p_3}$ написали симметричное выражение $\left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \right)$, воспользовавшись полным равноправием импульсов p_3 и p_2 .

§ 15. Основное кинетическое уравнение для коррелятивной функции

Приведенный выше вывод уравнения Больцмана, весьма простой и наглядный, страдает, однако, рядом недостатков, как принципиальных, так и практических. Действительно, в этом выводе рассмотрены только попарные соударения молекул. При этом парный характер соударений является весьма существенным, и совершенно не видно, каким образом можно обобщить вывод на случай тройных, четверных и т. д. столкновений. Вся область применимости общей теории суживается до случая весьма разреженных газов. С другой стороны, в приведенном выводе совершенно не видно важного принципиального мо-