приближении по малому параметру $1/v$, то в выражение (15,12) следует подставить значение ρ_{12} в нулевом приближении. Последнее может быть найдено без кинетического уравнения для ρ_{12}.

§ 16. Вывод уравнения Больцмана из основного кинетического уравнения

Рассмотрим достаточно разреженный газ, в котором частицы испытывают только попарные столкновения.

Для простоты в дальнейшем мы будем считать газ пространственно однородным, так что функция распределения ρ_1 зависит только от импульсов $\boldsymbol{p}$ и времени t, т. е.

$$\rho_1(t,\ x_1) = \rho_1(t,\ \boldsymbol{p}).$$

При этом бинарная функция распределения не должна изменяться при пространственном смещении двух частиц на постоянный вектор $\boldsymbol{a}$, т. е.

$$\rho_{12}(t,\ \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2) = \rho_{12}(t,\ \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2).$$

Это условие выполняется только в том случае, когда ρ_{12} является функцией расстояния между частицами $\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$,

$$\rho_{12} = \rho_{12}(t,\ \boldsymbol{r}_{12},\ \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2).$$

Мы можем, очевидно, ввести следующую шкалу возрастающих времен: 1) время столкновения $\tau_c \sim \frac{r_0}{\bar{v}}$, где r_0 — радиус сферы взаимодействия и $\bar{v}$ — средняя скорость; 2) среднее время между двумя последовательными соударениями, $\tau \sim \frac{\lambda}{\bar{v}}$, где λ — средняя длина свободного пробега; как мы увидим в дальнейшем, τ представляет время релаксации в микроскопических объемах газа; 3) макроскопическое время релаксации или гидродинамическое время $\tau_{\text{macro}} \sim \frac{L}{\bar{v}}$, где L — макроскопическая длина, например, размер сосуда с газом.

Очевидно, что всегда

$$\tau_c \ll \tau \ll \tau_{\text{macro}}. \tag{16,1}$$

Рассмотрим поведение газа в течение промежутков времени Δt таких, что $\tau_c < \Delta t \ll \tau$. За это время лишь очень немногие молекулы в газе успевают испытать столкновения. Поэтому поведение во времени основного числа частиц за времена Δt описываются функцией ρ_1.

Те немногие частицы, которые за время Δt успевают испытать столкновения, мысленно объединим в пары. Ясно, что число пар весьма мало́ по сравнению с полным числом частиц N. Поведение пар описывается, очевидно, бинарной коррелятивной функцией ρ_{12}. Наша задача заключается в установлении связи между ρ_1 и ρ_{12}. Это будет сделано в результате рассуждения, которое, строго говоря, справедливо лишь для времени порядка Δt.

Рассмотрим поведение коррелятивных функций в предельном случае $\frac{1}{v} \to 0$.

Уравнение для функции распределения при бесконечно малой плотности газа в пространственно однородном газе приобретает вид

$$\frac{d\rho_1(p, t)}{dt} = 0. \tag{16,2}$$

Формула (16,2) имеет простой смысл — в этом приближении частицы движутся независимо друг от друга.

Решение уравнения (16,2) удобно записать в символическом виде

$$\rho_1(p_1, t) = S_t^{(1)} \rho_1(p_1, t - \tau_c). \tag{16,3}$$

Оператор $S_t^{(1)}$ действует на функцию ρ_1, зависящую от переменных x_1, переводя функцию, взятую в начальный момент времени $(t - \tau_c)$, в функцию в момент времени t. Поскольку без столкновений частицы движутся в однородном газе с постоянным импульсом,

$$\rho_1(p_1, t) = \rho_1(p_1, t - \tau_c). \tag{16,4}$$

Аналогичным образом можно написать в приближении $\frac{1}{v} \to 0$ уравнение для коррелятивной функции ρ_{12}. Оно имеет, очевидно, вид

$$\frac{d\rho_{12}^{(0)}}{dt} = 0. \tag{16,5}$$

Соответственно можно написать решение уравнения (16,5) в символическом виде

$$\rho_{12}^{(0)}(t, x_1, x_2) = S_t^{(2)} \rho_{12}(t - \tau_c, x_1, x_2). \tag{16,6}$$

Оператор $S_t^{(2)}$ действует на функцию $\rho_{12}(x_1, x_2)$, зависящую от пары аргументов x_1 и x_2, переводя ее от значения в начальный момент времени $t - \tau_c$ к значению в момент времени t.

Уравнение (16,6) описывает поведение пары молекул, не подвергающихся воздействию со стороны остальных молекул.

Ясно, что такое рассмотрение и само уравнение (16,5) имеет строгий смысл только за промежуток времени меньший, чем время между последовательными столкновениями τ. Поскольку, однако, это время весьма велико по сравнению с временем столкновения, мы можем приближенно пользоваться (16,5) и для больших времен, т. е. будем полагать $t\to\infty$. Это основное допущение излагаемой теории, принадлежащей Н. Н. Боголюбову.

Запишем (16,6) в виде

$$\rho_{12}^{(0)}(t, x_1, x_2)=S_t^{(2)}\rho_{12}(t-\tau_c, x_1, x_2)=$$
$$=S_t^{(2)}\left[\rho_{12}(t-\tau_c, x_1, x_2)-\rho_1(t-\tau_c, x_1)\rho_1(t-\tau_c, x_2)\right]+$$
$$+S_t^{(2)}\rho_1(t-\tau_c, x_1)\rho_1(t-\tau_c, x_2). \qquad (16,7)$$

Перейдем к пределу $t\to-\infty$, т. е. рассмотрим коррелятивную функцию задолго до столкновения. Очевидно, что при $t\to-\infty$ поведение пары частиц не коррелятивно и

$$\lim_{t\to-\infty} S^{(2)}\rho_{12}(t-\tau_c, x_1, x_2)=\rho_1(t-\tau_c, x_1)\cdot\rho_1(t-\tau_c, x_2). \qquad (16,8)$$

Поэтому можно написать условие ослабления корреляции

$$\lim_{t\to-\infty} \rho_{12}(t, x_1, x_2)=\rho_1(t-\tau_c, x_1)\rho_1(t-\tau_c, x_2). \qquad (16,9)$$

Функция распределения ρ_1, в пространственно однородном газе зависит только от импульса. Пределу $t\to-\infty$ отвечают предельные значения импульсов частиц, входящих в момент времени $t=\tau_0$ в столкновение $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$, так что

$$\lim_{t\to-\infty} S_t^{-(2)}\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{P}_1, \qquad (16,10)$$

$$\lim_{t\to-\infty} S_t^{-(2)}\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{P}_2, \qquad (16,11)$$

где $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ — предельные значения импульсов частиц до столкновения, когда они находятся вне сферы взаимодействия.

Очевидно, что $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ связаны с импульсами $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ сталкивающихся частиц соотношением

$$H=\frac{p_1^2+p_2^2}{2m}+U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)=\frac{P_1^2+P_2^2}{2m}. \qquad (16,12)$$

Пользуясь (16,10)—(16,11) и учитывая (16,5), можно приближенно представить (16,9) в виде

$$\rho_{12}^{(0)}(t, x_1, x_2)\simeq\lim_{t\to-\infty} S_t^{(2)}\left[\rho_{12}(t-\tau_c, x_1, x_2)-\right.$$
$$\left.-\rho_1(t-\tau_c, x_1)\rho_1(t-\tau_c, x_2)\right]+\lim_{t\to-\infty} S_t^{(2)}\rho_1(t-\tau_c, x_1)\rho_1(t-\tau_c, x_2)=$$
$$=\rho_1(0, \boldsymbol{P}_1)\rho_1(0, \boldsymbol{P}_2)=\rho_1(t, \boldsymbol{P}_1)\rho_1(t, \boldsymbol{P}_2). \qquad (16,13)$$

Формула (16,13) позволяет выразить бинарную функцию распределения ρ_{12} через унарную функцию ρ_1. Однако, в то время как ρ_{12} является функцией импульсов $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ частиц, сталкивающихся в момент времени t, в формуле (16,13) функции ρ_1 зависят от другого аргумента — предельных значений импульсов $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ до столкновения.

Если мы захотим теперь перейти к получению функции распределения при конечном, но малом значении параметра $1/v$, то бинарную функцию нулевого приближения (16,13) следует подставить в правую часть уравнения (15,12). Это дает

$$\frac{\partial f(t, \boldsymbol{P}_1)}{\partial t} = \int \{U_{12};\ f(t, \boldsymbol{P}_1) f(t, \boldsymbol{P}_2)\}\, d\boldsymbol{r}_2\, d\boldsymbol{p}_2. \tag{16,14}$$

Преобразуем скобки Пуассона, воспользовавшись тем, что импульсы $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ — постоянные заданные векторы.

Благодаря этому

$$\{H;\ f(t, \boldsymbol{P}_1) f(t, \boldsymbol{P}_2)\} = 0. \tag{16,15}$$

Пользуясь (16,15), находим

$$\left\{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + U_{12};\ f(t, \boldsymbol{P}_1) f(t, \boldsymbol{P}_2)\right\} = 0,$$

откуда следует

$$\{U_{12};\ f(t, \boldsymbol{P}_1) f(t, \boldsymbol{P}_2)\} = -\left\{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2m};\ f(t, \boldsymbol{P}_1) f(t, \boldsymbol{P}_2)\right\} =$$

$$= -\frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial\,[f(t, \boldsymbol{P}_1) f(t, \boldsymbol{P}_2)]}{\partial(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)} + \frac{\boldsymbol{p}_2}{m}\frac{\partial\,[f(t, \boldsymbol{P}_1) f(t, \boldsymbol{P}_2)]}{\partial(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)} =$$

$$= -\frac{\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_{12}}[f(t, \boldsymbol{P}_1) f(t, \boldsymbol{P}_2)].$$

Таким образом, уравнение (16,14) можно представить в виде

$$\frac{\partial f(t, \boldsymbol{p})}{\partial t} = -\int \frac{(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1)}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_{12}}[f(t, \boldsymbol{P}_1) f(t, \boldsymbol{P}_2)]\, d\boldsymbol{r}_2\, d\boldsymbol{p}_2 = \int I\, d\boldsymbol{p}_2, \tag{16,16}$$

где через I обозначен интеграл

$$I = \int \frac{\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_{12}}[f(t, \boldsymbol{P}_1) f(t, \boldsymbol{P}_2)]\, d\boldsymbol{r}_2.$$

Для вычисления последнего введем цилиндрическую систему координат $(\boldsymbol{r}, \varphi, \xi)$, выбрав вектор $(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1)$ за положительное направление полярной оси ξ. Тогда имеем

$$x_1 = x_2 + r\sin\varphi,$$
$$y_1 = y_2 + r\cos\varphi,$$
$$z_1 = z_2 + \xi,$$
$$(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1) = [(p_2 - p_1),\ 0,\ 0],$$
$$d\boldsymbol{r}_{12} = r\, dr\, d\varphi\, d\xi,$$

так что можно написать

$$(p_2 - p_1)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_{12}}[f(t, \boldsymbol{P}_1) f(t, \boldsymbol{P}_2)] = \frac{p_2 - p_1}{m}\frac{\partial}{\partial \xi}[f(t, \boldsymbol{P}_1) f(t, \boldsymbol{P}_2)].$$

Импульсы $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ будут теперь функциями координат r, φ и ξ. За начало координат выберем точку $r_{12} = 0$, т. е. точку, в которой происходит столкновение. При таком выборе осей имеем

$$I = \frac{p_2 - p_1}{m}\int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi}[f(t, \boldsymbol{P}_1) f(t, \boldsymbol{P}_2)]\,d\xi =$$

$$= 2\pi\frac{(p_2 - p_1)}{m}\int_0^\infty r\,dr\,[f(t, \boldsymbol{P}_1) f(t, \boldsymbol{P}_2)]\Big|_{\xi\to-\infty}^{\xi\to\infty}.$$

Рассмотрим произведение

$$f(t, \boldsymbol{P}_1) f(t, \boldsymbol{P}_2)\Big|^{\xi\to\infty} = f(t - t'', \boldsymbol{P}_1) f(t - t'', \boldsymbol{P}_2)\Big|^{\xi\to\infty}, \quad (16,17)$$

где $t'' \leqslant \tau$. Ситуации $\xi \to \infty$ отвечают частицы, находящиеся на большом расстоянии друг от друга (вне области взаимодействия). При этом частицы удаляются друг от друга (это проще всего видно из того, что $\frac{p_2 - p_1}{m} = v_{\text{отн}}$ растет с ростом ξ). Это значит, что если частицы в момент времени t находятся на большом расстоянии, то в прошлом, в некоторый момент $t - t''$, они были на близком расстоянии, провзаимодействовали и затем разошлись. Импульсы $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ в (16,17) означают импульсы частиц до столкновения, в частности, непосредственно перед входом в соударение. Мы запишем это в виде

$$f(\boldsymbol{P}_1, t) f(\boldsymbol{P}_2, t)\Big|^{\xi\to\infty} = f(\boldsymbol{P}_1^*, t) f(\boldsymbol{P}_2^*, t), \quad (16,18)$$

где $\boldsymbol{P}_1^*$ и $\boldsymbol{P}_2^*$ — импульсы непосредственно перед соударением.

Произведение $f(\boldsymbol{P}_1, t) f(\boldsymbol{P}_2, t)\,|^{\xi\to-\infty}$ имеет другой смысл. Ситуация $\xi \to -\infty$ также отвечает частицам, находящимся в момент t на больших расстояниях, вне области взаимодействия. Однако эти частицы за промежуток времени от $t - \tau_c$ до t не успели сблизиться и столкнуться. Они движутся с постоянными значениями импульса, так что

$$f(\boldsymbol{P}_2, t) f(\boldsymbol{P}_1, t)\Big|^{\xi\to-\infty} = f(\boldsymbol{p}_2, t) f(\boldsymbol{p}_1, t), \quad (16,19)$$

где $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ — импульсы в момент t. Подставляя (16,18) и (16,19) в интеграл I, находим

$$I = \frac{p_2 - p_1}{m}\int_0^\infty r\,dr \int d\varphi\,[f(\boldsymbol{P}_1^*, t) f(\boldsymbol{P}_2^*, t) - f(\boldsymbol{p}_1, t) f(\boldsymbol{p}_2, t)]. \quad (16,20)$$

Подставляя (16,20) в (16,16), находим, что кинетическое уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{p}_1, t)}{\partial t} = \int\int r\,dr\,d\varphi \int v_{\text{отн}} [f(\boldsymbol{P}_1^*, t) f(\boldsymbol{P}_2^*, t) - f(\boldsymbol{p}_1, t) f(\boldsymbol{p}_2, t)]\, d\boldsymbol{p}_2. \tag{16,21}$$

При этом мы ввели относительную скорость частиц

$$v_{\text{отн}} = \frac{|\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1|}{m}.$$

В подынтегральное выражение входят импульсы $\boldsymbol{P}_1^*$ и $\boldsymbol{P}_2^*$ непосредственно перед столкновением. Ввиду симметрии задачи двух тел к обращению времени можно наряду с (16,21), написать

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{p}_1, t)}{\partial t} = \int r\,dr\,d\varphi \int v_{\text{отн}} [f(\boldsymbol{p}_3, t) f(\boldsymbol{p}_4, t) - f(\boldsymbol{p}_2, t) f(\boldsymbol{p}_1, t)]\, d\boldsymbol{p}_2, \tag{16,22}$$

где $\boldsymbol{p}_3$ и $\boldsymbol{p}_4$ — импульсы после столкновения. Вместо прицельного параметра r и азимутального угла можно ввести телесный угол и эффективное сечение соотношением

$$r\,dr\,d\varphi = \sigma\, d\boldsymbol{\Omega}.$$

Произведя в (16,21) эту замену, мы приходим к уравнению Больцмана:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{p}_1, t)}{\partial t} = \int v_{\text{отн}} \sigma [f(\boldsymbol{p}_3, t) f(\boldsymbol{p}_4, t) - f(\boldsymbol{p}_2, t) f(\boldsymbol{p}_1, t)]\, d\boldsymbol{p}_2\, d\boldsymbol{\Omega}. \tag{16,23}$$

В случае неоднородного газа аналогичным образом получается несколько видоизмененное уравнение Больцмана. Мы видели, что переход от обратимых уравнений механики — уравнения Лиувилля (15,2) к уравнению Больцмана включал в себя статистический этап — формулу (16,13). В формуле (16,13) с самого начала заложено допущение об асимметрии процесса во времени. Фиксируя состояния газа в данный момент времени t, мы анализировали вопрос о том, как он пришел в данное состояние. При этом статистическое распределение в данный момент связывается с тем, каким оно было в прошлом. Иными словами, система случайно попадает в ситуацию, которую мы называем столкновением. До столкновения «пара» частиц состояла из невзаимодействующих частиц. Их встреча в момент времени t является случайным актом. Начиная с этого момента и вплоть до момента $t + \tau$, когда частицы «пары» испытывают следующее столкновение, их движение имеет детерминированный характер. Таким образом, в самом выводе уравнения Больцмана заложено допущение об асимметрии времени и различие начального и конечного состояний. Поведение системы за время $t - \tau_c$ и $t + \tau$ существенно различное.

Приведенный вывод уравнения Больцмана содержит в явном виде разложение по малому параметру $\frac{1}{v}$.

Пользуясь развитой техникой разложений по параметру $\frac{1}{v}$, можно получить кинетическое уравнение для более плотных газов, чем те, которые описываются уравнением Больцмана. Однако этот вывод связан с громоздкими выкладками и мы его приводить не будем [1]).

§ 17. Обобщенное уравнение переноса и свойства аддитивных инвариантов

Из уравнения Больцмана можно получить ряд важных общих следствий, не связанных с нахождением явного вида функции распределения.

Допустим, что газ как целое совершает движение со средней скоростью $\boldsymbol{u}$. Оказывается, что с помощью уравнения Больцмана можно найти общее уравнение, которому должно удовлетворять среднее значение произвольной функции скорости относительного движения

$$V_i = v_i - u_i, \tag{17,1}$$

т. е. функции $\psi(V_i - u_i)$, где $i = x, y, z$.

Среднее значе́ние этой функции

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\int \psi f\, d\boldsymbol{v}}{\int f\, d\boldsymbol{v}} = \frac{1}{N}\int \psi(V_i) f\, d\boldsymbol{v}, \tag{17,2}$$

где N — число частиц в единице объема, является, вообще говоря, функцией координат и времени, поскольку от этих переменных зависит функция распределения f. Составим производную

$$\bar{\psi}\frac{\partial N}{\partial t} + N\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = \int \psi(V_i)\frac{\partial f}{\partial t}\, d\boldsymbol{v}. \tag{17,3}$$

Пользуясь уравнением Больцмана, можно представить (17,3) в виде

$$\bar{\psi}\frac{\partial N}{\partial t} + N\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} =$$
$$= -\int \psi(V_i)\, v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\, d\boldsymbol{v} - \int \psi(V_i)\frac{F_k}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_k}\, d\boldsymbol{v} + \int \psi(V_i)\, I\, d\boldsymbol{v}. \tag{17,4}$$

---

[1]) См. цитированную монографию Н. Н. Боголюбова, а также Д. Уленбек и Д. Форд, Лекции по статистической механике, «Мир», 1965. G. E. Uhlenbeck, G. Ford, Lectures in statictical mechanics American Mathemat. Society, Providence, 1963.