Приведенный вывод уравнения Больцмана содержит в явном виде разложение по малому параметру $\frac{1}{v}$.

Пользуясь развитой техникой разложений по параметру $\frac{1}{v}$, можно получить кинетическое уравнение для более плотных газов, чем те, которые описываются уравнением Больцмана. Однако этот вывод связан с громоздкими выкладками и мы его приводить не будем[1]).

§ 17. Обобщенное уравнение переноса и свойства аддитивных инвариантов

Из уравнения Больцмана можно получить ряд важных общих следствий, не связанных с нахождением явного вида функции распределения.

Допустим, что газ как целое совершает движение со средней скоростью $\boldsymbol{u}$. Оказывается, что с помощью уравнения Больцмана можно найти общее уравнение, которому должно удовлетворять среднее значение произвольной функции скорости относительного движения

$$V_i = v_i - u_i, \tag{17,1}$$

т. е. функции $\psi(V_i - u_i)$, где $i = x, y, z$.

Среднее значение этой функции

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\int \psi f\, d\boldsymbol{v}}{\int f\, d\boldsymbol{v}} = \frac{1}{N} \int \psi(V_i) f\, d\boldsymbol{v}, \tag{17,2}$$

где N — число частиц в единице объема, является, вообще говоря, функцией координат и времени, поскольку от этих переменных зависит функция распределения f. Составим производную

$$\bar{\psi}\frac{\partial N}{\partial t} + N\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = \int \psi(V_i)\frac{\partial f}{\partial t}\, d\boldsymbol{v}. \tag{17,3}$$

Пользуясь уравнением Больцмана, можно представить (17,3) в виде

$$\bar{\psi}\frac{\partial N}{\partial t} + N\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} =$$

$$= -\int \psi(V_i)\, v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\, d\boldsymbol{v} - \int \psi(V_i)\frac{F_k}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_k}\, d\boldsymbol{v} + \int \psi(V_i)\, I\, d\boldsymbol{v}. \tag{17,4}$$

---

[1]) См. цитированную монографию Н. Н. Боголюбова, а также Д. Уленбек и Д. Форд, Лекции по статистической механике, «Мир», 1965. G. E. Uhlenbeck, G. Ford, Lectures in statictical mechanics American Mathemat. Society, Providence, 1963.

Преобразуем интегралы, входящие в (17,4). Имеем, очевидно,

$$\int \psi v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} dv = \frac{\partial}{\partial x_k} \int \psi v_k f \, dv = \frac{\partial}{\partial x_k} N (\overline{v_k \psi}),$$

$$\int \psi \frac{F_k}{m} \frac{\partial f}{\partial v_k} dv = \frac{F_k}{m} \psi f \Big|_{|v| \to \infty} - \frac{F_k}{m} \int f \frac{\partial \psi}{\partial v_k} dv =$$

$$= - \frac{F_k}{m} \int f \frac{\partial \psi}{\partial v_k} dv = - \frac{F_k}{m} N \left(\overline{\frac{\partial \psi}{\partial v_k}} \right).$$

При этом предполагается, что функция распределения f убывает достаточно быстро с ростом абсолютной величины скорости, так что (ψf) стремится к нулю при $|v| \to \infty$.

Таким образом, (17,4) приобретает вид

$$\bar{\psi} \frac{\partial N}{\partial t} + N \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} N (\overline{v_k \psi}) - N \frac{F_k}{m} \left(\overline{\frac{\partial \psi}{\partial v_k}} \right) = \int \psi I \, dv. \quad (17,5)$$

Полученное уравнение носит название уравнения Энскога или обобщенного уравнения переноса. Ясно, что в общем виде, при произвольном виде функции ψ уравнение Энскога, нисколько не проще уравнения Больцмана. Если, однако, ψ является одним из аддитивных интегралов движения, т. е.

$$\psi(V_i^{\text{отн}}) = m, \qquad mV_i, \qquad \frac{m(V)^2}{2}, \quad (17,6)$$

то обобщенное уравнение переноса существенно упрощается.

Для того чтобы в этом убедиться, рассмотрим важное общее свойство интеграла, входящего в правую часть обобщенного уравнения переноса.

Обозначим его через G:

$$G = \int \psi I \, dv = \int \psi \sigma \, | v - v_1 | (f_2 f_3 - f f_1) \, dv \, dv_1 \, d\Omega.$$

симметризуем это выражение, воспользовавшись тем, что при замене аргументов

$$v \to v_1; \qquad v_1 \to v$$

интеграл G не изменяется:

$$G_1 = \int \psi_1 \sigma \, | v_1 - v | (f_2 f_3 - f f_1) \, dv_1 \, dv \, d\Omega = G.$$

С другой стороны, можно поменять местами пары переменных так, чтобы скорости до и после соударений поменялись местами:

$$v, \ v_1 \to v_2, \ v_3; \qquad v_2, \ v_3 \to v, \ v_1.$$

При этом очевидно имеем

$$| v - v_1 | = | v_2 - v_3 |$$

и мы вновь получаем

$$G_2 = \int \psi_2 |\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3| \sigma [ff_1 - f_2f_3] \, d\boldsymbol{v}_2 \, d\boldsymbol{v}_3 \, d\boldsymbol{\Omega} = -G_1,$$

$$G_3 = \int \psi_3 |\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_2| \sigma [f_1f - f_3f_2] \, d\boldsymbol{v}_3 \, d\boldsymbol{v}_2 \, d\boldsymbol{\Omega} = -G_1.$$

Суммируя величины G_i, можно представить их в симметричном виде

$$\sum G_i = \frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}{4} =$$
$$= \frac{1}{4} \int [\psi_2 + \psi_3 - \psi_1 - \psi] \, \sigma v_{\text{отн}} [f_2f_3 - ff_1] \, d\boldsymbol{v}_1 \, d\boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{\Omega}. \quad (17,7)$$

Пользуясь симметричным представлением (17,7), можно переписать обобщенное уравнение переноса в виде

$$\bar{\psi} \frac{\partial N}{\partial t} + N \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + N \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v_k \psi}) - N \frac{F_k}{m} \left(\overline{\frac{\partial \psi}{\partial v_k}} \right) =$$
$$= -\frac{1}{4} \int [\psi_2 + \psi_3 - \psi - \psi_1] \, \sigma v_{\text{отн}} (f_2f_3 - ff_1) \, d\boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{v}_1 \, d\boldsymbol{\Omega}. \quad (17,8)$$

Допустим теперь, что ψ является одним из аддитивных интегралов движения.

При столкновении частиц имеют место равенства

$$m_1 + m_2 = \text{const},$$
$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = \text{const},$$
$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \text{const}.$$

Для этих пяти аддитивных интегралов движения

$$\psi_2 + \psi_3 = \psi_1 + \psi,$$

поэтому

$$\sum G_i = 0.$$

Таким образом, ΣG_i является аддитивным интегральным инвариантом столкновений. Для пяти аддитивных интегралов обобщенное уравнение переноса упрощается и приобретает вид

$$\bar{\psi} \frac{\partial N}{\partial t} + N \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + N \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\psi v_k}) - N \frac{F_k}{m} \left(\overline{\frac{\partial \psi}{\partial v_k}} \right) = 0. \quad (17,9)$$

Ясно, что уравнение (17,9) существенно проще, чем общее уравнение (17,8), поскольку оно не содержит нелинейных членов, описывающих попарные соударения. По этой же причине уравнение (17,9) обладает большой общностью и фактически применимо и тогда, когда уравнение Больцмана уже теряет силу.