§ 18. Уравнения переноса массы, импульса и энергии

С помощью уравнения (17,9) можно найти макроскопические законы сохранения плотности импульса и энергии. Очевидно, что макроскопическая плотность однородного вещества может быть представлена в виде

$$\rho = mN; \qquad \psi = m.$$

При этом (17,9) дает непосредственно

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \rho u_k = 0. \tag{18,1}$$

Уравнение (18,1) представляет закон сохранения массы в движущейся среде.

Часто приходится иметь дело с многокомпонентным газом, состоящим из молекул с массами m_α. В этом случае нужно ввести понятия плотности и скорости α-го компонента:

$$\rho_\alpha = N^\alpha m_\alpha = m_\alpha \int f^{(\alpha)}\, dv, \tag{18,2}$$

$$u_i^\alpha = \int v_i^\alpha f^{(\alpha)}\, dv, \tag{18,3}$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots, r$, и массовую плотность и скорость:

$$\rho = \sum \rho^\alpha = \sum m^\alpha \int f^\alpha\, dv, \tag{18,4}$$

$$u_k = \frac{1}{\rho} \sum \rho^\alpha u_k^\alpha = \frac{1}{\rho} \sum m^\alpha \int v_k^\alpha f^\alpha\, dv. \tag{18,5}$$

Для величины $\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t}$ можно написать два выражения:

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} = m^\alpha \int \frac{\partial f^\alpha}{\partial t}\, dv = -m^\alpha \int v_k^\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_k}\, dv =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_k} m^\alpha \int v_k^\alpha f^\alpha\, dv = -\frac{\partial \rho^\alpha u_k^\alpha}{\partial x_k} \tag{18,6}$$

или

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k} m^\alpha \int \left(v_k^\alpha - u_k\right) f^\alpha\, dv - \frac{\partial}{\partial x_k} m^\alpha u_k \int f^\alpha\, dv =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(j_k^\alpha + u_k \rho^\alpha\right). \tag{18,7}$$

При этом мы ввели вектор

$$j_k^\alpha = m^\alpha \int \left(v_k^\alpha - u_k\right) f^\alpha \, dv, \tag{18,8}$$

именуемый диффузионным потоком α-го компонента. Вектор j_k^α представляет поток j_k^α-го компонента относительно средней массовой скорости u_k (ср. с (7,6)).

Формула (18,7) представляет собой закон сохранения массы, написанный для многокомпонентной смеси.

Суммируя выражения (18,8) для разных компонент и учитывая, что

$$\sum j_k^\alpha = \sum m^\alpha \int \left(v_k^\alpha - u_k\right) f^\alpha \, dv =$$

$$= \sum m^\alpha \int v_k^\alpha f^\alpha \, dv - u_k \sum m^\alpha \int f^\alpha \, dv = 0,$$

находим закон сохранения полной массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \rho u_k. \tag{18,9}$$

Перейдем теперь к формулировке закона сохранения импульса.

Для получения закона сохранения импульса можно подставить в (17,9) значение $\psi = mV_i$. Удобнее, однако, повторить до известной степени вывод формулы, вычислив производную от вектора импульса единицы объема

$$\rho u_i = Nm \int v_i f \, dv. \tag{18,10}$$

Мы ограничимся при этом случаем однокомпонентного газа.

Имеем очевидно, с помощью уравнения Больцмана и с учетом общего свойства аддитивного интегрального инварианта G:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) = Nm \int v_i \frac{\partial f}{\partial t} \, dv =$$

$$= - Nm \int v_i v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} dv - mN \int v_i \frac{F_k}{m} \frac{\partial f}{\partial v_k} dv =$$

$$= - Nm \int (v_i - u_i)(v_k - u_k) \frac{\partial f}{\partial x_k} dv + mNu_i u_k \int \frac{\partial f}{\partial x_k} dv -$$

$$- N_m \frac{\partial}{\partial x_k}(u_i u_k) + F_k N \int f \frac{\partial v_i}{\partial v_k} dv.$$

При этом мы образовали разности $(v_i - u_i)$ и $(v_k - u_k)$ и проинтегрировали последнее слагаемое по частям. Первый интеграл преобразуем к производной от интеграла:

$$\int (v_i - u_i)(v_k - u_k)\frac{\partial f}{\partial x_k}\,dv =$$
$$= \int \frac{\partial}{\partial x_k}[(v_i - u_i)(v_k - u_k) f]\,dv - \int f\,\frac{\partial}{\partial x_k}(v_i - u_i)(v_k - u_k)\,dv =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_k}\int (v_i - u_i)(v_k - u_k) f\,dv +$$
$$+ \int f\left[(v_k - u_k)\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + (v_i - u_i)\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right]dv =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_k}\int (v_i - u_i)(v_k - u_k) f\,dv + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\int f(v_k - u_k)\,dv +$$
$$+ \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\int f(v_i - u_i)\,dv = \frac{\partial}{\partial x_k}\int (v_i - u_i)(v_k - u_k) f\,dv,$$

так как, по определению среднего, интегралы $\int f(v_i - u_i)\,dv = 0$. Кроме того, имеем, очевидно

$$\frac{\partial v_i}{\partial v_k} = \delta_{ik}.$$

Введем вектор силы, отнесенный к единице объема

$$f_k = F_k N \tag{18,11}$$

и тензор σ_{ik}, именуемый тензором напряжений:

$$\sigma_{ik} = mN\int (v_i - u_i)(v_k - u_k) f\,dv = mN\overline{(v_i - u_i)(v_k - u_k)}. \tag{18,12}$$

По определению тензор σ_{ik} является симметричным, $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$.

Тогда получаем окончательно

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u_i = -\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}\rho u_i u_k + f_i, \tag{18,13}$$

или, пользуясь (18,9),

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i. \tag{18,14}$$

Уравнение (18,14) представляет собой макроскопическое уравнение движения газовой среды.

Наконец, можно аналогичным образом получить закон сохранения макроскопической энергии газовой среды. Среднюю энергию единицы объема газа, совершающего макроскопическое движение со средней скоростью u, можно написать в виде

$$E=\frac{1}{2}mN\int(v_i-u_i)^2 f\,dv. \tag{18,15}$$

Дифференцируя по времени, находим аналогично предыдущему:

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{1}{2}mN\int(v_i-u_i)^2\frac{\partial f}{\partial t}\,dv=$$
$$=-\frac{mN}{2}\int(v_i-u)^2 v_k\frac{\partial f}{\partial x_k}\,dv-\frac{mN}{2}\int(v_i-u_i)^2\frac{F_k}{m}\frac{\partial f}{\partial v_k}\,dv=$$
$$=-(I_1+I_2)\frac{mN}{2}. \tag{18,16}$$

Преобразуем оба интеграла в отдельности. Имеем

$$I_1=\int(v_i-u_i)^2 v_k\frac{\partial f}{\partial x_k}\,dv=$$
$$=\int(v_i-u_i)^2(v_k-u_k)\frac{\partial f}{\partial x_k}\,dv+u_k\int(v_i-u_i)^2\frac{\partial f}{\partial x_k}\,dv=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_k}\int(v_i-u_i)^2(v_k-u_k)f\,dv-\int f\frac{\partial}{\partial x_k}[(v_i-u_i)^2(v_k-u_k)]\,dv+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_k}u_k\int(v_i-u_i)^2 f\,dv-\int f\frac{\partial}{\partial x_k}[u_k(v_i-u_i)^2]\,dv=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_k}\int(v_i-u_i)^2(v_k-u_k)f\,dv+\frac{\partial}{\partial x_k}u_k\int(v_i-u_i)^2 f\,dv-$$
$$-\int fv_k\frac{\partial}{\partial x_k}(v_i-u_i)^2\,dv=\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{(2q_k+2u_kE)}{mN}+$$
$$+2\int f\cdot(v_i-u_i)\,v_k\,dv\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{2q_k+2u_kE}{mN}+2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\sigma_{ik}}{mN}+2\int f(v_i-u_i)\,v_k\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\,dv=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{(2q_k+2u_kE)}{mN}+2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\sigma_{ik}}{mN}.$$

При этом было использовано определение (18,12) и введено обозначение

$$q_k=\frac{mN}{2}\int(v_i-u_i)^2(v_k-u_k)f\,dv. \tag{18,17}$$

Очевидно, что вектор q_k представляет вектор плотности потока энергии.

Для интеграла I_2 имеем

$$I_2 = \frac{F_k}{m} \int (v_l - u_l)^2 \frac{\partial f}{\partial v_k} dv =$$

$$= \frac{F_k}{m} (v_l - u_l)^2 f \Big|_{v \to \infty} - 2 \frac{F_k}{m} \int (v_l - u_l) \delta_{lk} f \, dv = 0.$$

Окончательно находим

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} (q_k + E u_k) - \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \tag{18,18}$$

Соотношение (18,18) выражает закон сохранения энергии. Изменение энергии в единице объема связано с потоком полной энергии, вытекающим из этого объема $(q_k + Eu_k)$ и работой против внутренних сил $\left(\sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)$. Если выразить энергию идеального газа через температуру, то вместо (18,18) можно написать

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} (q_k + c_v T u_k) - \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \tag{18,19}$$

Совокупность уравнений (18,9), (18,14) и (18,19) представляет систему уравнений газа в приближении сплошной среды.

Хотя эти уравнения выведены для идеального газа, область их применимости гораздо шире. Они выражают общие законы сохранения в сплошной среде и в таком общем виде применимы не только в разреженном газе, но и к капельным жидкостям. Однако фактическое их использование требует нахождения явного вида тензора напряжений σ_{ik} и вектора тока энергии q_k. Последнее в свою очередь требует знания функции распределения f.

Ниже будет показано, что в некотором приближении функция распределения, а соответственно, и величины σ_{ik} и q_k, могут быть найдены путем интегрирования уравнения Больцмана для идеального газа.

В капельных жидкостях приходится довольствоваться эмпирическими выражениями σ_{ik} и q_k. Повторяя аналогичные вычисления, можно без труда получить законы сохранения импульса и энергии для смеси идеальных газов.

§ 19. Закон возрастания энтропии

В статистической физике мы подробно осветили закон возрастания энтропии. В § 25 ч. III был установлен принцип возрастания энтропии. Было показано, что при изменении состояния замкнутой системы энтропия конечного состояния всегда больше, чем энтропия начального состояния.