

Для интеграла I_2 имеем

$$I_2 = \frac{F_k}{m} \int (v_i - u_i)^2 \frac{\partial f}{\partial v_k} dv = \\ = \frac{F_k}{m} (v_i - u_i)^2 f \Big|_{v \rightarrow \infty} - 2 \frac{F_k}{m} \int (v_i - u_i) \delta_{ik} f dv = 0.$$

Окончательно находим

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} (q_k + E u_k) - \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (18,18)$$

Соотношение (18,18) выражает закон сохранения энергии. Изменение энергии в единице объема связано с потоком полной энергии, вытекающим из этого объема ($q_k + E u_k$) и работой против внутренних сил $\left(\sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)$. Если выразить энергию идеального газа через температуру, то вместо (18,18) можно написать

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} (q_k + c_v T u_k) - \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (18,19)$$

Совокупность уравнений (18,9), (18,14) и (18,19) представляет систему уравнений газа в приближении сплошной среды.

Хотя эти уравнения выведены для идеального газа, область их применимости гораздо шире. Они выражают общие законы сохранения в сплошной среде и в таком общем виде применимы не только в разреженном газе, но и к капельным жидкостям. Однако фактическое их использование требует нахождения явного вида тензора напряжений σ_{ik} и вектора тока энергии q_k . Последнее в свою очередь требует знания функции распределения f .

Ниже будет показано, что в некотором приближении функция распределения, а соответственно, и величины σ_{ik} и q_k , могут быть найдены путем интегрирования уравнения Больцмана для идеального газа.

В капельных жидкостях приходится довольствоваться эмпирическими выражениями σ_{ik} и q_k . Повторяя аналогичные вычисления, можно без труда получить законы сохранения импульса и энергии для смеси идеальных газов.

§ 19. Закон возрастания энтропии

В статистической физике мы подробно осветили закон возрастания энтропии. В § 25 ч. III был установлен принцип возрастания энтропии. Было показано, что при изменении состояния замкнутой системы энтропия конечного состояния всегда больше, чем энтропия начального состояния,

Однако в рамках статистического рассмотрения невозможно установить, как совершается переход из начального в конечное состояние. В кинетике оказывается возможным более детально изучить характер изменения энтропии и показать, что энтропия идеального газа монотонно возрастает во времени.

Вычислим изменение энтропии единицы объема одноатомного идеального газа, воспользовавшись для этого выражением (25,6) ч. III:

$$s = -k \int f \ln f \, dv.$$

Дифференцируя s по времени и используя уравнение Больцмана, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial t} k \int f \ln f \, dv = -k \int (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} \, dv = \\ &= k \int (1 + \ln f) v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \, dv - k \int (1 + \ln f) I \, dv + \\ &+ k \int (1 + \ln f) \frac{F_k}{m} \frac{\partial f}{\partial v_k} \, dv = k \int (1 + \ln f) v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \, dv - \\ &- k \int I (1 + \ln f) \, dv. \end{aligned}$$

Легко видеть, что опущенное третье слагаемое обращается при интегрировании в нуль.

Преобразуем также первое слагаемое

$$\begin{aligned} \int (1 + \ln f) v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \, dv &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \int (1 + \ln f) v_k f \, dv - \int f \frac{\partial}{\partial x_k} [(1 + \ln f) v_k] \, dv = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \int f \ln f v_k \, dv = -\frac{\partial j_k^s}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Здесь $j_k^s = -\int v_k f \ln f \, dv$ — вектор потока энтропии.

Используя свойства симметрии интеграла соударения (17,7), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial j_k^s}{\partial x_k} &= -k \int I (1 + \ln f) \, dv = \\ &= -\frac{k}{4} \int [\ln f + \ln f_1 - \ln f_2 - \ln f_3] (f_2 f_3 - f_1 f) \sigma v_{\text{отн}} \, dv \, dv_1 \, d\Omega. \quad (19,1) \end{aligned}$$

Формула (19,1) определяет изменение энтропии в данном элементе объема газа. Это изменение связано, с одной стороны,

с потоком энтропии переносимого частицами газа, а с другой стороны, — процессами молекулярных соударений, которые характеризуются правой частью (19,1). Проинтегрируем (19,1) по всему объему V замкнутой системы.

Тогда получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{k}{4} \int \ln \left(\frac{f_2 f_3}{ff_1} \right) \cdot (f_2 f_3 - ff_1) \sigma v_{\text{отн}} dv dv_1 d\Omega dV, \quad (19,2)$$

где S — полная энтропия системы $S = \int s dV$. Интеграл

$$\int \frac{\partial j_k^{(S)}}{\partial x_k} dV = \oint j_k dS_k = 0,$$

поскольку поток на границе замкнутой системы равен нулю.

Нетрудно заметить, что подинтегральная функция в (19,2) является существенно положительной. Действительно,

$$\ln \left(\frac{f_2 f_3}{ff_1} \right) [f_2 f_3 - ff_1] \geq 0. \quad (19,3)$$

Если $f_2 f_3 > ff_1$, то как логарифм, так и квадратная скобка имеют положительный знак; если $f_2 f_3 < ff_1$, то оба они отрицательны. При $f_2 f_3 = ff_1$ подинтегральная функция обращается в нуль. Поскольку интеграл от существенно положительной функции также положителен, мы видим, что в замкнутой системе

$$\frac{\partial S}{\partial t} \geq 0. \quad (19,4)$$

Таким образом, доказано, что энтропия замкнутой системы — идеального одноатомного газа, монотонно возрастает во времени или постоянна. Мы видим, что кинетическая теория устанавливает характер и детализирует механизм роста энтропии, связывая его с межмолекулярными столкновениями.

§ 20. Равновесное и локально равновесное распределение в идеальном газе

При возрастании энтропии она стремится к некоторому пределу, так что

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (20,1)$$

В действительности энтропия достигает своего максимального значения не при $t \rightarrow \infty$, но по прошествии некоторого времени релаксации τ .

Вычисление времени релаксации представляет очень сложную задачу. Ниже мы найдем приближенное значение времени релаксации.